Sipsă Nr. 5-8 inclusiv

LICEUL „GH. LAZĂR" - SIBIU
Biblioteca Profesorilor
No. 8771

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XIV. No. 1 1 OCTOMBRIE 1947

1947

18.8
5
940.4

9692

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 7-3803

GAZETA MATEMATICA
SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XIV. No. 1 — 1 OCTOMBRIE 1947

ABONAMENTUL LEI 180 PE AN (9 numere)

Pentru instituţii şi biblioteci lei 400

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa: ING. C. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

ACTIVITATEA CORESPONDENŢILOR

Menţionăm numele corespondenţilor la S. E. G. M., care s'au distins prin cea mai bogată activitate desfăşurată în anul şcolar 1946—47 [1] aşa cum se desprinde din paginile volumului XIII.

Clasa a III-a: IONESCU BUJOR C. CL. (77 [2]), liceul Mihai Viteazul Bucureşti); LUMÂNARE V. F. (38, liceul Matei Basarab, Bucureşti).

Clasa a IV-a: GÂRLEŞTEANU M. ELIZA (69, liceul Carmen Sylva, Timişoara); FLONDOR I. I. (60, liceul Târgu-Jiu); POPESCU V. D. (53, liceul Şincai, Bucureşti); MĂRTOIU C. C. (51, liceul Târgu-Jiu); HOGEA GR. (42, Colegiul Predeal); GHEORGHIU V. V. (40, idem); BĂGHINĂ V. A. (35, liceul Turnu-Severin); DABIJA F. E. (35, Colegiul Predeal); NOVAC I. CORNELIA (35, liceul Carmen Sylva, Timişoara); PACOSTE C. I. (34, liceul Târgu-Jiu).

Clasa a V-a: RISTEA G. G. (115, liceul Matei Basarab, Bucureşti); FĂCĂOARU G. I. (107, Colegiul Predeal); PETRE I. GHEORGHE (89, idem); SULICĂ A. A. (86, idem); NEACŞU G. I. (81, idem); STĂNESCU D. C. (59, liceul Reşiţa); CIUCIU I. N. (58, liceul Târgu-Jiu); GĂINĂ I. N. (52, Colegiul Predeal); AMOHNOAIE A. E. (51, idem); COMĂNESCU S. V. (57, liceul Buzău); PETCU A. LUCIA (43, Şc. Centrală, Bucureşti).

Clasa a VI-a: POPOVICI D. D. (95, Col. Sf. Sava, Bucureşti); CERNESCU A. P. (92, liceul Târgovişte); PĂUNESCU ŞT. G. (80, liceul Matei Basarab, Bucureşti); OLTEANU N. G. (57, Colegiul Predeal); CORCIOVEI I. A. (55, liceul Marele Voevod Mihai); COSOROABĂ G. V. (55, liceul Târgu-Jiu); NEGUŢ A. I. (52, idem); FUIOREA I. D. (50, idem); GEORGIAN N. N. (49, Colegiul Predeal); RIZAN V. V. (48, Colegiul Predeal); TRIPŞA AURICA (48, liceul Braşov); COCOŞ GH. (45, liceul Mihai Viteazul); POPESCU P. S. (45, liceul Râmnicu-Sărat); ANDRIŢOIU I. P. (44, liceul Târgu-Jiu); HUREZEANU M. R. (44, idem); PACOSTE C. C. (43, idem); ISAC N. P. (42, idem); BUZULOIU C. V. (41, idem); ŞTEFĂNESCU I. S. (41, liceul Mihai Viteazul, Timişoara); COANDĂ C. I. (40, liceul Târgu-Jiu).

Clasa a VII-a: TEODORESCU P. P. (210, lic. Matei Basarab, Bucureşti); DODU A. E. (152, liceul Mihai Viteazul, Bucureşti); PETCU A. V. (99, idem);

1) Numerele 4—9 anul XIII şi 1 anul XIV.

2) Numărul de probleme publicate ca rezolvate; cele însemnate cu asterisc au fost socotite dublu.

ENESCU G. G. (90, particular, Bucureşti); CONSTANTINESCU G. V. (87, liceul Slatina); BADEA N. M. (79, liceul Târgu-Jiu); CORDUNEANU C. (78, Colegiul Predeal); MUNTEANU T. I. (68, idem); DIACONU V. (62, idem); DE SABATA P. I. (61, liceul Beiuş); PĂSĂRIN G. G. (60, liceul Târgu-Jiu); ANDREI A. C. (56, liceul Mihai Viteazul, Bucureşti); CERNESCU A. N. (58, liceul Târgovişte); CIUCEANU N. P. (58, liceul Slatina); MUSTĂCIOSU T. V. (47, Colegiul Sf. Sava, Bucureşti); VOICU C. A. (46, liceul Ploeşti); ALMĂJANU I. L. (45, liceul Piatra Neamţ); MĂNCESCU N. I. (45, Colegiul Predeal); OLARU G. V. (44, liceul Aurel Vlaicu, Bucureşti); POPESCU L. I. (44, Colegiul Predeal); MOREGA V. T. (42, liceul Târgu-Jiu); ROŞU V. C. (42, Colegiul Predeal); BARBUL V. V. (40, liceul Oradea); NICOARĂ N. M. (40, idem).

Clasa a VIII-a: HARET SP. R. (84, liceul Francez, Bucureşti); DONEAUD E. A. (70, liceul T. Maiorescu, Bucureşti); VASILIU E. D. (65, liceul Mihai Viteazul, Bucureşti); BĂLĂ V. C. (64, liceul Târgu-Jiu); STANCU D. D. (54, liceul Arad); BUCUR A. N. (43, liceul T. Maiorescu, Bucureşti).

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE" DIN 1948

1. Societatea *Gazeta Matematică*, în Adunarea generală dela 26 August 1947, a hotărît să se ţină în anul 1948 concursul tradiţional, între elevii liceelor din întreaga ţară din clasele IV, V, VI, VII şi VIII.

Concursul va avea loc în ultimele zile ale vacanţei de Paşti. Data şi locul ţinerii concursului se va anunţa în numărul 6 din Februarie 1948 al revistei *Gazeta Matematică*, când se va publica şi numele candidaţilor admişi la concurs.

2. Inscrierea la concurs se va face *numai* prin cerere individuală, *scrisă personal* de candidat şi primită la Societatea *Gazeta Matematică*, Calea Griviţei 158, Bucureşti, până la ora 12 în ziua de 18 Ianuarie 1948.

Nu se primesc cereri scrise şi trimise de părinţi, rude, cunoştinţe, profesori sau şcoli.

3. In cerere, candidatul va arăta pe puncte, în ordine, următoare:

a) Numele de familie, iniţiala numelui părintelui şi numele de botez.

b) Şcoala şi clasa în care urmează. Cei pregătiţi în particular vor arăta şcoala la care au urmat în anul precedent sau la care au depus examenul pentru clasa precedentă.

c) Adresa personală: în timpul şcoalei şi în timpul vacanţei de Paşti.

d) Dacă dispune sau nu de mijloace de a veni la Bucureşti, dacă are sau nu unde fi găzduit şi întreţinut în timpul concursului.

Cei cari au nevoie de bani pentru transport vor indica gara de plecare spre Bucureşti şi pe cea de înapoiere dela Bucureşti.

e) Activitatea dela *Gazeta Matematică* şi *Suplimentul Gazetei Matematice* indicând numerele de ordine ale problemelor şi exerciţiilor rezolvate sau menţionate.

4. Candidaţii admişi pentru concurs, dar care din diferite motive nu vor putea sau nu vor mai voi să vină la concurs, sunt obligaţi să anunţe în scris şi din timp societatea.

5. Părăsirea sălilor de concurs este interzisă înainte de a preda lucrarea scrisă.

6. Candidaţii reuşiţi la concurs vor primi diplome şi premii sau menţiuni. Primul reuşit va primi şi premiul «LT. COL. G. TĂNĂSESCU» constând din cărţi.

Programa analitică a concursului şi materiile la care vor fi examinaţi concurenţii din fiecare clasă se vor publica în numărul 2 al *Gazetei Matematice.*

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ".

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa a V-a. *Exerc. 970. Să se rezolve ecuaţia*

$$\frac{x+a}{b}+\frac{b}{x+a}=\frac{x+b}{a}+\frac{a}{x+b}$$

caz particular $a=b$.

Soluţie. Scriem ecuaţia sub forma

$$\frac{x+a}{b}-\frac{a}{x+b}=\frac{x+b}{a}-\frac{b}{x+a} \quad \therefore \quad \frac{x(x+a+b)}{b(x+b)}=\frac{x(x+a+b)}{a(x+a)}$$

de unde

(1) $x(x+a+b)=0$ sau (2) $b(x+b)=a(x+a)$

Ecuaţia (1) ne dă

$x=0$, $x=-(a+b)$ şi ecuaţia (2) ne dă $x=-(a+b)$ dacă $a\neq b$.

Deci ecuaţia dată admite rădăcinile

(3) $x=0$ şi $x=-(a+b)$.

Aceste rădăcini verifică ecuația, cum se observă imediat. Dacă $a = b$ obținem o identitate și (3) devin iluzorii. Se pare că am ajuns la o contradicție. Eroarea constă în faptul că vrem să aplicăm rezultatul (3) găsit în ipoteza $a \neq b$ tocmai cazului exclus.

V. 975. Fie I *centrul cercului înscris triunghiului* ABC. *Cercul* BIC *taie laturile* AB, AC *în* B', C'. *Triunghiul* AB'C' *este egal cu* ABC.

Soluție. Bisectoarele exterioare ale unghiurilor B, C se taie în I_a, așezat pe AI. Unghiul IBI_a fiind drept, cercul BIC are centrul în mijlocul segmentului II_a, deci pe bisectoarea unghiului A; cercul BIC este simetric față de AI, laturile unghiului A de asemenea deci punctele B, B' sunt simetrice, C și C' la fel, triunghiurile ABC, AB'C' sunt simetrice față de AI, deci egale.

Clasa a VI-a. *Exerc. 1006—1007. In triunghiul* ABC *fie* O *centrul cercului circumscris de rază* R *și* A', A'' *intersecțiile diametrului* AO *cu latura* BC *și cu cercul. Avem*

$$\overline{OA'} = \frac{R\cos A}{\cos(B-C)}, \quad \overline{A'B} = \frac{2R\sin C\cos C}{\cos(B-C)}, \quad \overline{A'A''} = 2R\frac{\cos B\cos C}{\cos(B-C)}.$$

Soluție. In triunghiul dreptunghic ABA'',

$$\sphericalangle BAA'' = 90^0 - \sphericalangle BA''A = 90^0 - C.$$

In triunghiul ABA' aplicăm teorema sinusurilor

$$\overline{A'B} = \frac{\overline{AB}\cdot\sin BAA'}{\sin(BAA'+B)} = \frac{2R\sin C\cdot\sin(90^0-C)}{\sin(B+90^0-C)}$$

și de aici trecem imediat la forma din enunț.

Fie M mijlocul laturii BC. $\sphericalangle BOM = \frac{1}{2}\sphericalangle BOC = A$, deci

$\overline{OM} = \overline{BO}\cos BOM = R\cos A$. Atunci

$$\overline{OA'} = \frac{\overline{OM}}{\sin AA'B} = \frac{R\cos A}{\sin(B+90^0-C)} = \frac{R\cos A}{\cos(B-C)}$$

In triunghiul BA'A" aplicăm teorema sinusurilor

$$\overline{A'A''} = \frac{\overline{BA'}\sin A''BC}{\sin BA''A'} = \frac{2R\sin C\cos C}{\cos(B-C)} \cdot \frac{\sin A''AC}{\sin C}$$

care conduce la forma din enunț căci

$$\sphericalangle A''AC = 90^0 - \sphericalangle AA''C = 90^0 - B.$$

Clasa a VIII-a. *Exerc. 890. Un cerc* C, *fix este tangent axelor* Ox, Oy; M *fiind variabil pe cerc, tangenta în* M *taie axele în* U *și* V. *Centrul de greutate* G *al triunghiului* OUV *descrie o iperbolă echilateră.*

Soluție analitică. Fie C (r, r) centrul cercului și u abscisa lui U. UC are panta $\operatorname{tg}\alpha = r:(r-u)$, deci UV are panta $\operatorname{tg}2\alpha$ și V are ordonata $v = -u \cdot \operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2r(r-u)}{2r-u}$. Coordonatele lui G sunt

$$x = \frac{u}{3} \quad , \quad y = \frac{2r(r-u)}{3(2r-u)}$$

și eliminând pe u, obținem

$$9xy - 6rx - 6ry + 2r^2 = 0 \quad \therefore \quad \left(x - \frac{2r}{3}\right)\left(y - \frac{2r}{3}\right) = 2\frac{r^2}{9}$$

ceea ce reprezintă o iperbolă echilateră cu asimptotele paralele cu axele, de centru $\left(\dfrac{2r}{3}, \dfrac{2r}{3}\right)$.

Soluție geometrică. Fie P mijlocul segmentului UV; $\overline{OG} = \dfrac{2}{3}\overline{OP}$; este suficient să aflăm locul lui P, deoarece G descrie o curbă omotetică. Notăm $\overline{OU} = u$, $\overline{OV} = v$ și fie încă A, B contactele cercului C pe laturi. Avem relațiile

$$\overline{UM} = \overline{UA} = u - r, \quad \overline{VM} = v - r \quad \text{și} \quad \overline{UV}^2 = \overline{OU}^2 + \overline{OV}^2$$

sau $(u + v - 2r)^2 = u^2 + v^2 \quad \therefore \quad uv - 2r(u+v) + 2r^2 = 0$ [1].

---

1) Este ușor de observat U și V descriu diviziuni omografice pe axe deci între abscisele lor avem o relație de forma

$$uv + hu + h'v + k = 0;$$

din cauza simetriei $h = h'$; când $u = 2r$, $v = \infty$ deci $h = -2r$; când U ≡ A V ≡ 0 deci $k = -rh = 2r^2$.

Fie acum X, Y distanţele lui P la paralelele CX, CY duse din C la axele Ox, Oy, avem

$$X + r = \frac{u}{2} \quad , \quad Y + r = \frac{v}{2}$$

sau $$XY = \left(\frac{u}{2} - r\right)\left(\frac{v}{2} - r\right) = \frac{uv}{4} - \frac{r(u+v)}{2} + r^2$$

şi ţinând seamă de relaţia dintre u şi v

$$XY = \frac{r^2}{2}$$

deci P descrie o iperbolă echilateră de asimptote CX, CY.

Exerciţii Generale. *Exerc. 756. Care este cel mai mare divizor comun al numerelor*

$$2^{1941} - 1 \quad \text{şi} \quad 2^{22068} - 1 \,?$$

GH. B.

D-l N. GEORGESCU ROEGEN atrăgând atenţia că soluţia dată acestui exerciţiu la pag. 140, Vol. XIII al *Suplimentului cu Exerciţii*, este greşită fiind bazată pe o teoremă greşit enunţată, republicăm soluţia acestui exerciţiu.

Fie Δ c. m. m. d. c. al celor 2 numere. Avem

$$A = 2^{1941} - 1 = \Delta A'$$

$$B = 2^{22068} - 1 = 2^{11 \cdot 1941 + 717} - 1 = [2^{1941} - 1 + 1]^{11} \cdot 2^{717} - 1$$

$$\therefore \quad B = M(2^{1941} - 1) + 2^{717} - 1 = \Delta B'$$

Prin urmare Δ divide pe $2^{717} - 1$ şi avem

$$C = 2^{717} - 1 = \Delta C'.$$

Observăm că

$$A = 2^{2 \cdot 717 + 507} - 1 = M(2^{717} - 1) + 2^{507} - 1 = \Delta A'$$

$$\therefore \quad D = 2^{507} - 1 = \Delta D'$$

Dar $$C = 2^{507+210} - 1 = MD + 2^{210} - 1$$

$$\therefore \quad E_1 = 2^{210} - 1 = \Delta E_1'.$$

Şi continuând pe această cale avem

$D = 2^{2\cdot 210+87} - 1 = M.E_1 + 2^{87} - 1 \quad \therefore \quad E_2 = 2^{87} - 1 = \Delta E_2'$

$E_1 = 2^{2\cdot 87+36} - 1 = M.E_2 + 2^{36} - 1 \quad \therefore \quad E_3 = 2^{36} - 1 = \Delta E_3'$

$E_2 = 2^{2\cdot 36+15} - 1 = M.E_3 + 2^{15} - 1 \quad \therefore \quad E_4 = 2^{15} - 1 = \Delta E_4'$

$E_3 = 2^{2\cdot 15+6} - 1 = M.E_4 + 2^{6} - 1 \quad \therefore \quad E_5 = 2^{6} - 1 = \Delta E_5'$

$E_4 = 2^{2\cdot 6+3} - 1 = M.E_5 + 2^{3} - 1 \quad \therefore \quad E_6 = 2^{3} - 1 = 7 = \Delta E_6'$

E_6 fiind număr prim rezultă că Δ căutat este chiar numărul 7.

Până la 1 Sept., 1947 am primit soluţii la exerciţiile propuse în numerele 6, 7, 8 şi 9 Vol. XIII, dela*):

Liceul „Alex. Ghica", Alexandria.

Clasa a VII-a: ILIESCU N. C. (VII: 953, 5); LĂZĂRESCU P. P. (VII: 953, 5, 6, 7, 8, 9, 61, VIII: 878).

Liceul „Elena Ghiba Birta", Arad.

Clasa a IV-a: TIRICA DELIA (IV: 810, 5, 6).
Clasa a V-a: BRAUNŞTEIN M. MELANIA (V: 971); GOICEA G. (V: 971).

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa a V-a: MUNTEANU G. M. (V: 989).
Clasa a VIII-a: STANCU D. D. (VIII: 885, 7, 8, 91, E. G.: 790).

Particulari, Arad.

Clasa a VI-a: PERNEVAN I. ST. (VI: 994, 1001, 2).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuş.

Clasa a VI-a: TEODOR R. (VI: 1004, 5, 6*, 7*, VII: 965, E. G.: 790).
Clasa a VII-a: DE SABATA P. I. (VII: 961, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 70, 4, 5); PANTEA N. A. (VII: 955, 6, 7, 9, VIII: 878, 9).

Liceul „Sf. Vasile", Blaj.

Clasa a VI-a: MĂRGINEAN A. G. (VI: 1003, 10).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa a IV-a: BEŞCHEA I. I. (IV: 810, 1, 2, 3); MANOLE A. (IV: 810).
Clasa a VIII-a: ENESCU G. I. (VIII: 879*, 80*, 1).

---

*) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu foarte bine rezolvat şi foarte îngrijit redactat.

Liceul Principesa Elena, Braşov.

Clasa a V-a: IVAN M. CONSTANŢA (V: 972, 4, 8, 81, VI: 1003, 4); PANAITESCU I. CARMEN (V: 971, 2, 4, 8, 9).

Liceul de fete „Regina Maria", Bucureşti.

Clasa a III-a: DIDENCO A. TEODORA (III: 329).

Clasa a V-a: BĂTĂLIGĂ G. VICTORIA (V: 981, 2).

Şcoala Centrală de fete, Bucureşti.

Clasa a V-a: CRISTESCU I. SMARANDA (V: 971, 4, 7, 9, 81, 2, 1002); PETCU A. LUCIA (V: 980, 1, 2, VI; 1004, 6, 7, 9, 10; VII: 966).

Clasa a VII-a: MOŢOC D. CORNELIA (VII: 953, 9, 60).

Liceul de fete „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa a V-a: DIACONU RODICA (V: 971, 3, 4, 8); MITROFAN C. MARIA (V: 979, 80).

Clasa a VI-a: MARCU I. ALEXANDRINA (VI: 994*, 7).

Institutul de fete „Sf. Maria", Bucureşti.

Clasa a III-a: GHEORGHIU MIHAELA (III: 327, 30, 1, 2); TROSTEANEŢCHI B. SOFIA (III: 328, 30).

Clasa a IV-a: PAPAIANOPOL D. DOMNICA (IV: 815, 6).

Liceul de fete „Focşăneanu", Bucureşti.

Clasa a VII-a: LAZAROVICI P. FELICIA (VII: 969, 74); REINSTEIN M. SILVIA (VII: 959).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa a IV-a: DEATCU I. E. (IV: 810, 6).

Clasa a V-a: COSTAKE N. N. (V: 974, 81, 2).

Clasa a VI-a: OTTULESCU E. V. (VI: 994, 5); POPOVICI D. D. (VI: 994, 5, 7, 9, 1001, 2, 3, 4, 6*, 7*, 8*, VII: 953, 6, 7*, 9*, 61, 2, 4).

Clasa a VII-a: MĂRĂŞESCU A. D. (VII: 953, 5, 9); MUSTĂCIOSU T. V. (VII: 960, 1, 2, 3, 4, 6*, 7, 8, 9, 72, 3*, 4, 5, VIII: 887, E. G.: 790, 1, 3, 4).

Clasa a VIII-a: LEONTE I. A. (VIII: 891); OGHINĂ G. P. (VIII: 891).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa a V-a: DULFU P. Ş. (V: 972, 4, 5, 7, 88, 93, 4).

Clasa a VI-a: STĂNESCU D. C. (VI: 995, 7, 9, 1002, 3, 4,5).

Clasa a VII-a: PERSU A. N. (VII: 953, 6, 7*, 9, VIII: 878).

Clasa a VIII-a: CHIRILĂ A. R. (VIII: 878, 85).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa a III-a: LUMÂNARE V. F. (III: 327, 9, 30, 1, IV: 808, 9, 10, 2, 4, 5, 6, V: 979, 82).

Clasa a V-a: RISTEA G. G. (VI: 1011*).

Clasa a VI-a: PĂUNESCU ŞT. G. (VI: 995, 7, 9, 1001, 2, 3, 4, 6*, 7*, 9, 10, 1*, E. G.: 790).

Clasa a VII-a: TEODORESCU P. P. (VII: 960, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 70, 2, 3*, 4, 5, VIII: 887, 8, 9*, 90*, 1*, 2, 3, 4*, 6*, 7*, 8*, 9, 900, 1, 2, 3, 4, 5, E. G.: 789, 90, 1, 2, 3, 4).

Clasa a VIII-a: MANOLESCU T. C. (VIII: 880, 5).

Liceul „Mihai Viteazul", Bucureşti.

Clasa a III-a: IONESCU BUJOR C. CL. (IV: 808, 15, 6, V: 970, 4, 9, 81, 2).

Clasa a IV-a: PETRESCU V. M. (IV: 809, 10).

Clasa a V-a: CONSTANTINESCU I. V. (V: 971, 4, 9, 82).

Clasa a VII-a: DODU A. E. (VIII: 882, 4*, 5, 6*, 7, 8, E. G.: 790); PETCU A. V. (VII: 965, 6, 8, 74, 5).

Clasa a VIII-a: DĂSCĂLESCU I. M. V. (VIII: 883, 5, 6*, 7, 8, 9*); LUPU G. C. (VIII: 881, 3, 5, 8, 90*); VASILIU E. D. (VIII: 884, 5, 7, 8, 9).

Liceul „Spiru Haret", Bucureşti.

Clasa a VI-a: GOLDSTEIN I. C. (VI: 994, 5).

Liceul „Mihail Eminescu", Bucureşti

Clasa a VIII-a: SAVOPOL T. L. (VIII: 878, 9, 81, 3, 4*, 5).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa a V-a: HANGAN M. T. (V: 981, 2).

Clasa a VIII-a: BUCUR A. N. (VIII: 885, 6, 8, 91, 2, 3, 904); DONEAUD E. A. (VIII: 887, 8, 9, 90*, 1*, 2, 3, 4*, E. G.: 790).

Liceul „Marele Voevod Mihai", Bucureşti.

Clasa a IV-a: SCÂNTEIE A. A. (IV: 808, 9, 10, 1, 2, 3).

Clasa a VI-a: CORCIOVEI I. A. (VI: 997, 1006, 7, 8, 9, 10, 1*, 2, 3*, 4, E. G.: 791).

Liceul „Gheorghe Şincai", Bucureşti.

Clasa a IV-a: POPESCU V. D. (IV: 809, 12, 4, 5, 6, V: 970, 7, 82, VI: 1002).

Clasa a VIII-a: DIMITRIU G. R. (VIII: 888, 92, 3).

Liceul „Mihail Eminescu", Bucureşti.

Clasa a VI-a: ANGHEL D. V. (VII: 953).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa a VII-a: DELEANU I. S. (VII: 955, 6, 7, 9, 61, 2, 3, 4); DROBOTĂ P. V. (VII: 960, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 72, 3*, 4, 5, E. G.: 790, 1, 3, 4); OLARU G. V. (VII: 955, 6, 7, 61, 2, 3, 4).

Liceul de Construcţii Civile şi Edilitare, Bucureşti.

Clasa a VI-a: BĂRDESCU L. I. (VI: 997, 1003, 5).

Liceul Francez, București.

Classe de math. élém.: HARET S. R. (VIII: 888, 90*, 1*, 4, 905, E. G.: 786, 7, 8, 90, 1, 2, 3, 4).

Liceul „Profesorii Asociați" București.

Clasa a III-a: GUGUI C. D. (III: 328, 9, 30, 1, 2).

Liceul „M. Sebastian", București.

Clasa a VI-a: HERMAN L. M. (VI: 994, 5, 7, 9, 1005); KAMENITZER A. S. (VI: 994, 5, 7, 9, 1002, 5, 9, 10, E. G.: 783, 8).

Liceul „Cultura" Nr. 2, București.

Clasa a VII-a: IAMPOLSCHI A. I. (VII: 962, 4, VIII: 890*, 1).

Particulari-București.

Clasa a VII-a: ENESCU G. G. (VII: 953, 4, 7*, 65, 6, 7, VIII: 878, 9*, 80*, 1, 3, 5, 6*, E. G.: 789, 91).

Liceul „B. P. Hașdeu", Buzău.

Clasa a V-a: COMĂNESCU D. V. (V: 980, 7, 8, 9, 90, 1, 1009, VII: 965).
Clasa a VIII-a: STĂNILĂ D. G. (VIII: 879, 85).

Liceul „Dragoș-Vodă", Câmpulung-Bucovina

Clasa VII-a: GRIGOROVICI GH. IOAN (VII: 960, 1*, 2, 3, 4, E. G.: 780*).
Clasa a VIII-a: DIACON G. V. (VIII: 878, 9*, 80, 2, 3*, 4, 5*, 6*).

Liceul „Ioniță Assan", Caracal.

Clasa a VI-a: PAPADOPOL E. PETRE (VI: 1002, 3).

Liceul „G. Barițiu", Cluj.

Clasa a VI-a: STRĂULEA N. AUREL (VI: 1003*, 4*, 9, VII: 965).

Liceul „Simeon Ștefan", Cluj.

Clasa a VII-a: MUNTEANU G. SERGIU (VII: 953*, 4, 5*, 6, 7*, 8, 9, VIII: 878 E. G.: 788).

Seminarul Pedagogic Universitar Cluj.

Clasa a III-a: SOPA P. SORIN (III: 327*, 30).

Liceul „Frații Buzești", Craiova.

Clasa a VI-a: MARINESCU GH. IULIUS (VI: 994, 5*, 1002, E. G. 784).

Liceul Armatei „D. A. Sturdza", Craiova.

Clasa a III-a: ACHIMESCU N. MIHAIL (III: 329, 30*), BARLOGEANU MARIUS (III: 327); BĂZĂVAN ȘT. ELEFTERIE (III: 331, 2*); CHESUAIU I. TUDOR (III: 327, 9, 31*, 2); FLORESCU C. DUMITRU (III: 327, 32); GHERGHICEANU N. ION (III: 330); LUCA I. ION (III: 327*); MALCOCI ȘT. MIRCEA (III: 327*, 9, 30*, 1, 2*); MARINESCU S. CRISTIAN (III: 327*, 30, 1*, 2*); PISTRIȚU TRAIAN.

VICTOR (III: 332); PITICU N. AURICĂ (III: 332); POPA GH. NICOLAE (III: 327, 329, 31*, 2); POPA C. VASILE (III: 327, 9); POPESCU I. CONST. (III: 331); POPESCU DAN (III: 327, 32*); RINGHEANU T. NICOLAE (III: 332); ROTARU M. CONST. (III: 327*); SEMENESCU GH. (327, 9, 30, 1, 2), ȘERBĂNESCU S. LIVIU (III: 332); STELIAN C. TRICĂ (III: 327, 30, 1*, 2); TALPOȘ ATANASIE (III: 327, 31); TILEA ARCADIE (III: 332); TURBATU M. CONST. (III: 327); VOICULESCU I. RADU (III: 332); ZAMFIR ȘT. GHEORGHE (III: 332).

Clasa a IV-a: ANDREI ȘTEFAN (IV: 812, 15, 6); ATANASIU V. IOAN (IV: 808); CIOROIANU D. N. LIVIU (IV: 808, 10*, 15, 6),; DRĂGHICI R. I. ALEXANDRU (IV: 808, 10*, 5, 6); GHIȚĂ V. EMIL (IV: 808*, 15, 6),; ILIESCU D. IOAN (IV: 808*, 10, 5, 6); IONESCU P. EMILIAN (IV: 815*, 6*); IURESCU T. LUCIAN (IV: 808, 15, 6); MARCU V. NICOLAE (IV: 808*, 10, 5, 6); MIREA I. CONST. (IV: 810); MOCĂNESCU I. VICTOR (IV: 808, 10); MORARU I. VIRGIL (IV: 815*, 6*); NEICU MIHAIL (IV: 808, 10, 5); NICOLĂESCU ȘT. (IV: 808); NUȚICĂ GH. ȘTEFAN (IV: 810, 5, 6*); OSACI GHEORGHE (IV: 808*, 10, 5, 6).

Clasa a IV-a: RADOMIR M. ILIE (IV: 808*, 10); SECHELI D. ION (IV: 808, 10*, 5, 6); STĂNESCU A. EUGEN (IV: 808, 10, 5, 6); TRANCĂ GH. MIHAI (IV, 816).

Clasa a V-a: BARBU I. EMIL (V: 978, 81, 2*); BĂGHINĂ VASILE (V: 978*, 9, 81*, 2*, VIII: 887); BENIOG GH. SEBASTIAN (V: 981); CIUCĂ I. MIRCEA (V: 978, 9, 81, 2); CUMPĂNAȘU C. ION (V: 981*); CUPEȘ D. PUIU (V: 981*); DRĂGAN I. I. (V: 978, 81*, 2*); GHIȚĂ IOAN (V: 978, 81); IONESCU N. VALERIU (V: 978, 81, 2*); MICU GH. IOAN (V: 970*, 3, 4*, 81, 2); MOCĂNESCU DUMITRU (V: 978); NEGOESCU C. GH. (V: 981*), NUȚĂ GH. IONEL (V: 978*); POGOREVICI TH. LEONIDA (V: 978, 81*); POPESCU T. JEAN (V: 978*, 81*); ROTARU P. JEAN (V: 981); ROTARU C. GHEORGHE (V: 978, 81, 2*); ȘOROAGĂ DAN VASILE (V: 978*); STAICU FLOREA (V: 978*, 9, 81*, 2*); VLAD I. TRAIAN (V: 981).

Clasa a VI-a: MIHĂLCIONU M. (VI: 994, 1003*).

Clasa a VIII-a: AUGUST NICU (VIII: 879, 80*); EJTODE M. ARTINIAN (VIII: 880); NICOLESCU CONST. IOAN (VIII: 879, 80); VEȘIAN GH. ANTON (879* 80).

Colegiul Militar, Curtea de Argeș.

Clasa a VI-a: ANTONESCU PAUL (VI: 995, 7); BUZDUGAN VIRGIL (VI: 995, 7*, VIII: 878, E. G. 788); CĂPRARU C. I. (VI: 994*, 5*, 7, 9*, 1002*, VIII: 878, E. G.: 788); CHIRILĂ N. OCTAVIAN (VI: 995, 7*), DINESCU N. ALEX. (VI: 994, 5*, 7*, VIII: 878*, E. G.: 787, 8*); DRĂGHICESCU CONST. (VI: 994, 5*, 7, 1002*, VIII: 878*); HADRIANUS N. GHIONEA (VI: 994*, 5, 7*), LASCU T. ALEX. (VI: 994, 5*, 7*, 9, VIII: 878*); PRISICEANU I. ȘTEFAN (VI: 994, 5, 7*, 1002, VIII: 878*), RADU M. AUREL (VI: 994, 5, 7*, 1002*, VIII: 878*).

Liceul „Em. Gojdiu", Oradea Mare.

Clasa a IV-a ANDRONIC S. S. (IV: 795, 6, 7, 9, 800, 2); BARBONȚA A. (IV: 795, 6, 7, 8, 9, 800); BELEA D. T. (IV: 795, 6, 7, 8, 9, 800),; CIUPA S. S. (IV: 795, 6, 803, 4, 5); CODOBAN T. T. (IV: 795, 6, 7, 8, 9, 800); FÜRTÖS A. G. (IV: 795, 6, 7, 8, 9, 800, 2); JURJUȚ P. (IV: 795, 6, 7, 8, 9, 800); LEUCA F. V.

(IV: 795, 800, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 3, 5, 6, 7, 9, 20, V: 968, 75, VI: 1002); MAXIMILIAN I. F. (IV: 795, 6, 7, 8, 9, 800); PIRONCOF A. P. (IV: 795, 6, 7, 8, 9); SONEA AL. (IV: 795, 6, 7, 8, 800); TEODORESCU G. G. (IV: 795, 6, 7, 8, 800); TRAIAN NICOARĂ (IV: 801, V: 963, 4).

Clasa V-a: ARALD S. A. (V: 955, 63, 4, 5, 6); BALAGIU I. F. (V: 955, 63, 4, 5, 6, 7); CHIȘIU P. T. (V: 974, 7); CIOARA P. P. (V: 955, 63, 4, 5, 6); GALEA N. N. (V: 955); HAȚEGANU I. P. (V: 955, 60, 3, 4, 5, 6, 8); IFTIMOVICI V. R. (V: 964, 5, 6); LUCACIU G. O. (V: 955, 63, 4, 5, 6); MALIȚA T. I. (V: 963, 4, 5, 6); MISAROȘ N. P. (V: 963, 4, 5, 6, 7); NICA AL. (V: 963, 5); OROS E. T. (V: 964, 5); PINȚIE G. (V: 963, 4); SĂRBU C. N. (V: 955, 63, 4, 5, 6); STOIA F. D. (V: 963, 4, 5, 6, 7); ȘUTA I. M. (V: 955, 7, 8, 60, 5, 6, 7, 70, 2, 3, 4, 80, 1, 2, 8, 9, 94, E. G.: 788); TERDIC V. V. (V: 964, 5, 6).

Clasa a VI-a: HRIANCA A. I. (VI: 978, 80, 2, 8, 95, 7, VII: 948); POPA F. P. (VI: 978, 9, 80, 4*, 6, 8, 94, 5, 7, 9, 1002, 3, 4, 6, 7*, VII: 934, 42); POPA T. C. (VI: 980, 2); ROSENBERG N. AL. (VI: 980, 2); TRIFA P. F. (VI: 980, 2).

Clasa a VII-a: BARBUL V. V. (VII: 934, 5, 6, 7, 8, 9, 40*, 1, 2, 53, 5, 6, 7, 63, 4, VIII: 869, 70, 3, 4); BIRTA D. C. (VII: 934, 5, 6, 7, 8, 9, 40*, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8*); CARVAȘI C. C. (VII: 934, 5, 6, 8*, 41, 2, 3, 4, 5, 7, 8); CIOANCĂ G. T. (VII: 936, 8, 9, 40, 7); MINOIU I. D. (VII: 935, 6, 7, 8, 9, 40); NICOARĂ N. M. (VII: 934, 5, 6*, 7, 40, 53, 4, 5, 6, 7, 9, VIII: 861, 79, E. G.: 775, 6, 88); TEODORESCU E. (VII: 934, 5, 6, 7, 8).

Clasa a VIII-a: HEGEDIS AL. (VIII: 875, E. G.: 779, 80, 1, 2, 3); HORA I. D. (VIII: 861, 3, 6, 7, 72, 4, 5).

Liceul „Petru Rareș", Piatra-Neamț.

Clasa a V-a: ABRAMOVICI L. I. (V: 955, 7, 8, 60, 3, 4, 5); ALTER M. I. (V: 963, 4, 5); COJOCARU C. L. (V: 955, 8, 63, 4, 5,); ZAMFIR C. V. (V: 955, 8, 63, 5).

Clasa a VII-a: ALMĂȘANU I. L. (VII: 944, 5, 7, 8, 53, 4, 7, 8, 60, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, VIII: 969, 78, 9, E. G.: 780, 1); AGAPI D. V. (VII: 940, 7, 53, 5, VIII: 974, 5); MARIAN G. M. (VII: 934, 5, 6).

Clasa a VIII-a: VULOVICI C. C. (VIII: 861, 5, 6, 7, 8, 9, 72, 3, 4, E. G.: 729, 80, 1).

Liceul „I. C. Brătianu", Pitești.

Clasa a V-a: ANDREESCU C. S. (V: 957, 8*, 63, 4, 5); BRĂTESCU A. M. (V: 963, 4, 5, 6); DIACONESCU E. L. (V: 955, 6, 7, 8); GABOR V. D. (V: 955, 7, 8, 60, 3, 4, 5, 6, 8); GHENEA M. N. (V: 955, 6); ILIESCU C. P. (V: 955, 7, 8, 60); IVĂNUȘ E. G. (V: 955, 7, 64, 5, 8); LEIBOVICI M. (V: 955, 7, 8, 60, 4, 5,); MUȘAT I. G. (VI: 955, 7); SĂLIȘTEANU D. D. (V: 955, 60, 3, 4, 5, 6, 7, VIII: 869); STĂNCULESCU D. M. (V: 948, 50, 1); UNGUREANU N. M. (V: 964).

Clasa a VI-a: NEDELESCU P. P. (VI: 978, 81, 2, 6, 8, 9, 94, 5, 7, 9*, 1002, VIII: 879, E. G.: 788).

Clasa a VII-a: STĂNCIULESCU S. FL. (VII: 953, 5, 6, 60*, 1, 3).

Liceul „Sf. Petru și Pavel", Ploiești.

Clasa a IV-a: MANCIU D. C. (IV: 805, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5).
Clasa a V-a: MANOLESCU I. N. (V: 961, 5, 91, VI: 983, 8, VII: 998, 9).
Clasa a VIII-a: KAUFMANN I. M. (VIII: 869*, 70, 3, 4, 5, 7, 9, 80, 4).

Liceul de fete „Despina Doamna", Ploiești.

Clasa a IV-a: ATHANASIU A. RODICA (IV: 803, 10); ȘOVĂIALĂ I. PAULA (IV: 802, 3, 4).
Clasa a V-a: CĂLUȘIȚĂ I. MIOARA (V: 948, 50, 4, 63*, 4).

Colegiul Militar „N. Filipescu", Predeal.

Clasa a III-a: FURTUNESCU M. D. (III: 322, 3, E. G., 774).
Clasa a IV-a: BOGDĂNEȚ V. N. (IV: 802, 3); DRĂGHICESCU I. D. (IV: 799, 800, 1); GURIȚĂ C. V. (IV: 802, 3, 4, 6, 8, 9, 10, V: 982); GHEORGHIU V. V. (IV: 802, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 3, 4, 5, 6, V: 970, 5, 9, 80, 1, 2, 1002); HOGEA GR. (IV: 808, 10, 1, 2, 4, 5, 6); HUDIȚĂ I. H. (IV: 808, 9, 13, 5, 6, V: 982); ISPAS GR. TR. (IV: 797, 8, 813); LUPAȘCU E. (IV: 801, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 1, 2, 4, 5, 6, V: 982); MIHĂILESCU C. (IV: 799, 800, 1, 5, 6); POPA N. E. (IV: 808, 9, 10); SANDU V. G. (IV: 805, 6).
Clasa a V-a: AMOHNOAIE A. E. (V: 965, 70, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 80, 1, 2, VI: 1002, VII: 932, 3, 5, 41, 2, 3, VIII: 830, 1, 69, 78, 9, 80, 1, 2, 3, E. G.: 779, 80, 1, 3, 6); BRAN H. ȘT. (V: 959, 63, 4, 5); GĂINĂ T. N. (V: 955, 7*, 8, 60, 1, 2, 72, 3, VII: 937, E. G.: 773, 4, 9, 80, 1, 2, 3); GHEORGHE I. P. (V: 959, 68*, 70, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 80, 1, 2, VI: 1002, VII: 959, VIII: 878, 9, 80, 1, 3, 8, E. G.: 779, 80, 1); FĂCĂOARU GH. I. (V: 955*, 6, 7, 8, 9, 60, 1*, 2, 3, 4, 5, 6, 7*, 8, 70, 1*, 2*, 3*, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 80, 1, 3, VI: 978*, 93, 1002*, VII: 932, 5, 7, 8*, 9*, 40*, 2, 59, VIII: 861, 6, 9, 74, 8*, 9, 81, 2, 3, E. G.: 779, 80, 1, 2, 3, 4, 6, 8*); IONESCU G. D. (V: 963, 4, 5, E. G.: 779, 80, 1); NEACȘU GR. I. (V: 955, 8, 60, 1*, 2*, 3, 4, 5, 7, 8, 70, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8*, 9, 80, 1, 2, 3, 1002, VII: 935, 7, 53, VIII: 866, 75, 7, 9, 80, 1, E. G.: 779, 80, 1, 2, 3); NICULESCU N. (V: 940, 9, 61*, 2, 3, 4, 5, E. G.: 773, 4, 9, 80, 1); PĂTRĂNICHE A. N. (V: 964, 5, E. G.: 779, 80, 1); RĂDUȚ C. C. (VI: 955, 8*, 63, 4, 5, VI: 973, E. G.: 780, 1); SULICA A. A. (V: 963, 4, 5, 6, 7, 8, VII: 943, VIII: 877, E. G.: 783, 7, 9, 80, 1, 2); TRAIAN M. (V: 968, 72, 4, 5, 7, E. G.: 782, 3); ZAMFIR V. GH. (V: 948, 9, 50, 4, 5, 7*, 9, 60, 1, 2*, 3, 4, 5, 7, 8, VII: 927, VIII: 952, E. G.: 789).
Clasa a VI-a: CÂRSTEA N. M. (VI: 978, 9, 81, 2, 5, 8, 9, 91, 2*, 3); CONSTANTIN M. I. (VI: 979, 82, 9, 91); EMANOIL V. (VI: 978, 9, 81, 2, 4, 5, 8, 9, 91), GEORGESCU B. C. (VI: 995, 7, 9, E. G.: 778),; GEORGIAN N. N. (VI: 981, 3, 8*, 93, 4, 5, 7, 9, 1000, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 1, 2, 7, VII: 965, 6, E. G.: 786, 9); ILIE N. GH. (VII: 978*, 9, 80, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 92*, 3*); MARCU D. V. (VI: 981, 5, 9, 91, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 1000, 1, 3, 4, 5, 6, 7, E. G.: 786); OLTEANU N. G. (VI: 978*, 9*, 80, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9*, 91, 3, 4, 5, 7, 9, 1000, 1, 2, 3*, 4*, 5*, 6*, 7*, 8*, VIII: 879); RIZAN V. V. (VI: 980, 3, 95, 7, 9, 1000, 1, 3, 4, 6, 7, E. G.: 786); RUSE G. N. (VI: 989, 91, 3); RUSU D. I. (VI: 978,

82, 5, 9*, 93*); TUDOR C. E. (VI: 978, 9, 80, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 91, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 1000, 2, 4, E. G.: 788); ȚĂRU M. I. (VI: 979, 82, 9, 91); VIOR C. (VI: 981, 2, 4).

Clasa a VII-a: ALBU N. T. (VII: 934, 5, 6, 7, 8*, 9, 40*, VIII: 852, E. G.: 772, 3, 4); CIOCANU V. (VII: 941, 2, 3, 4, 7, VIII: 860, 2, 7, 83, 4, 5),; CONSTANTINESCU P. (VII: 934, 9, VIII: 838, 40, 61, 2, 73); CORDUNEANU C. VII: 835, 7*, 8, 40, 1, 2, 7, 8*, VIII: 861, 2, 3, 4, 5*, 8, 73, 6*, 7); DAMIAN C. (VII: 927, 8, 9, 30, 1, 2, 4, 6, 7, 9, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, VIII: 852, 5, 62, 70, 5, 8, 9, 80, 1, E. G. 779); DIACONU C. (VII: 953, 5, 6, 7, 9, VIII: 878, 9, 81); MĂNCESCU N. I. (VII: 934, 5, 6, 7, 8, 9, 40, 1, 2, 3, 4*, 7, VIII: 861, 4, 5, 62, E. G.: 772, 5, 6); MUNTEANU T. J. (VII: 934, 5, 6, 7, 8*, 9, 40*, VIII: 864, 5, 7); POPESCU L. I. (VII: 935, 6, 7, 8, 40, 2, 4, 6, 7, 8, 61, 5, 7,); ROȘU V. C. (VII: 934, 42, 3, 4, 6, 7, 8, 53, 5, VIII: 869, E. G.: 779, 80, 1, 5); ROTARU I. (VII: 941, 2, 8); STOIAN J. D. (VII: 934, 5, 7, 8, 9, 40, VIII: 861).

Liceul „Eudoxiu Hurmuzachi", Rădăuți.

Clasa a VIII-a: VLAD M. (VIII: 869, 72, 4, 5, 80, 1, 3, E. G.: 779, 80, 1, 3).

Liceul „Al. Lahovary", Râmnicul-Vâlcea.

Clasa a VI-a: ZUGRĂVESCU G. D. (VI: 978, 80, 2, 3).

Clasa a VIII-a: ȚUGULEA G. A. (VIII: 864, 6, 7, 8).

Liceul „Regele Ferdinand I", Râmnicu-Sărat.

Clasa a III-a: NIȚĂ V. I. (III: 322).

Clasa a IV-a: DINU Ș. P. (IV: 795, 7, 8, 800); DRĂGULESCU C. M. (IV: 795, 7, 9, 800); LABĂ C. D. (IV: 795, 6, 7); LĂPTOIU GH. I. (IV: 797); PASCU D. (IV: 808, 9, 10); RĂILEANU P. (IV: 796, 7, 8, 9, 800); STOG D. I. (IV: 797, 8, 9*, 800); VELEA M. N. (IV: 787, 93, 5, 6, 7, 8, 800); ZUCHI GH. (IV: 796, 9, 800).

Clasa a V-a: ASĂNACHE V. N. (V: 965, E. G.: 779, 80, 1, 3); ASĂNĂCHESCU D. S. (V: 979, 81, 2); BOTEA D. V. (V: 961, 5, 6, E. G.: 779, 80, 1); CONSTANTINESCU N. D. (V: 955, 7, 8, 9, 61, 3, 5, 6); CREȚU D. O. (V: 963, 4, 5, 79, 82); DUȚĂ M. I. (V: 962, 6, 8, 79, 81, 2*); IONESCU TR. (V: 958, 60, 1*, 2*, 3, 4, E. G.: 779, 80, 1, 3); IORGU M. TH. (V: 955, 6*, 8*, 61*, 2*, 3*, 4*, 5*, 6, 8, 79, 81, 2*); MARIN O. (V: 979, 81, 2, 5, 8, 9, 90, 2, 4, 5, 6); RĂDULESCU I. (V: 949, 50, 66, 7); RIȚĂ I. L. (V: 965, E. G.: 779, 80, 1, 3); SĂLCIANU D. (V: 978, 9, 80, 1, 2); SLĂVOIU V. I. (V: 965, 7, VI: 978, E. G.: 779, 80, 1, 3); SURLARU T. (V: 963, 4, 5); TEODORESCU C. I. (V: 955 65); TEODORESCU GH. (V: 964, E. G.: 779, 80, 1, 3); VOINEA Z. GH. (V: 963 4, 5, 6).

Clasa a VI-a: ALEXE B. (VI: 964, 6, 7, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 4); AVASILINEI C. I. (VI: 980, 9*, 1002, 3, E. G.: 779, 80, 1, 3); BRENER M. (VI: 978, 81, 2, 3); BUTEREZ D. N. (VI: 972, 3, 4, 5, E. G.: 773, 4); BUTUC A. (VI: 978, 82); BUZOIANU V. (VI: 982, E. G.: 779, 80); DINĂ S. M. (VI: 971, 2, 3, 4,

E. G.: 774); GĂZDARU I. D. (VI: 964, 6, 9, 71, 3, 4, 5, 6, 83, E. G.: 773, 4, 9, 80); HUNCEAG I. N. (V: 974, 6, 7, 80; E. G.: 773, 4), IORDĂNESCU M. VI: 975); ISPAS G. I. (VI: 975); JUGUREANU V. E. (VI: 972, E. G.: 773, 4); MIHAI M. V. (VI: 973, 4, 5, 6, 7); MIHĂILESCU V. I. (VI: 974, 5, 6, 8, 80, E. G.: 773, 4); MOISESCU M. (VI: 978, 80, 2, VII: 928, E. G.: 780, 1, 3); NESTOR C. I. (VI: 972, 3, 4, 6, E. G.: 773, 4); PANAIT C. (VI: 978, E. G.: 779, 80, 1, 3); PESOSCHI P. S. (VI: 966, 7, 9, 72, 3, 8, E. G.: 773, 4); PISCULESCU S. G. (VI: 966, 7, 9, 71, 2, 3, 6); POPESCU P. (VI: 981, 2, 3, 4*, 5, VII: 935, 6, 42, E. G.: 775*, 6, 9, 80, 1, 3); POPESCU P. ȘT. (VI: 964, 6, 7, 8, 9, 70, 2); RĂDULESCU Z. I. (VI: 975, 6, 8, E. G.: 773, 4); TURLACU N. M. (E. G.: 779, 80, 1, 3); TUTOVEANU G. A. (E. G.: 779, 80, 1, 3); VASILESCU GR. (VI: 974, 80, E. G.: 773, 4); VELEA M. E. (VI: 969, 71, 2, 3, 4, E. G.: 769, 73, 4).

Clasa a VII-a: ANGHELACHE C. D. (VII: 930); BUDESCU G. O. (VII: 927, 8); CĂLIN R. V. (VII: 930, 5, 6); DIACONESCU ȘT. (VII: 947, 8, 9); DINCĂ I. N. (VII: 942, 5, 7, E. G.: 775, 6, 9); ENE A. N. (E. G.: 779, 80, 1).

Liceul „Elina Matei Basarab", Râmnicu-Sărat.

Clasa a IV-a: MANEA VALERIA (IV: 802); RUFF. ȘARLOTA (IV: 804, 6, 8, 9, 10, VI: 981, E. G.: 783).

Liceul teoretic, Reșița.

Clasa a V-a: STĂNESCU D. C. (V: 959, 6, 2, 3, 7, 8, 70, 1, 2, 4, 9*, 80, 1, 2, VI: 966, 1002, VIII: 871, 3, 5, 9*, 80*).

Liceul teoretic mixt „Principele Carol" Sănicolaul Mare Timiș-Torontal.

Clasa a V-a: VOICHIȚA TR. (V: 970, 1*, 2).

Liceul de fete „Domnița Ileana", Sibiu.

Clasa a III-a: HERȚIA RODICA (III: 322, 3, 7, 8); SAINT-GEORGES IOANA (III: 322, 3).

Liceul „Radu Greceanu", Slatina-Olt.

Clasa a III-a: NICOLESCU C. M. (III: 327, 8, 9, 31, 2).

Clasa a IV-a: DINCĂ N. V. (IV: 809, 10, 2, 3).

Clasa a VI-a: CONSTANTINESCU I. N. (VIII: 904, E. G.: 779, 80, 1, 2, 3).

Clasa a VII-a: CIUCESCU N. P. (VII: 935, 41, 2, 4*, 7, 8*, 53, 5, VIII: 865, 9, 70, 1, 3, 4, 5, 8, 9, 80, 1, 3, E. G.: 779, 80, 1, 2, 3, 8*); CONSTANTINESCU G. V. (VII: 964, 5, 6, 71, 4, VIII: 868*, 9, 71, 91, 904, E. G.: 774*, 7, 8, 80, 1*, 2, 3, 4); NAICU M. I. (VII: 922, 3, 7, 31, 4, 8, 9, 47, 48*, E. G.: 773, 4, 9, 80, 1, 3).

Liceul „Enăchiță Văcărescu", Târgoviște.

Clasa a VI-a: CERNESCU A. P. (VI: 978*, 9, 80, 1, 2, 3*, 4, 5, 6*, 91, VII: 934*, 5*, 6, 7, 8*, 9*, 40, 1, 2, 4, 5, 6, 7, VIII: 861, 6, 7, 8, 73, 4, E. G.: 775*, 9, 80, 1, 2, 3*).

Clasa a VII-a: CERNESCU A. N. (VII: 935, 6, 7, 8, 9, 40*, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8*, 51, VIII: 861, 6, 7, 8, 72, 3, 4, E. G.: 775, 9, 80, 1, 2, 3).

Clasa a VIII-a: NIȚESCU A. I. (VIII: 861, 4, 6, 7, 8).

Liceul „Ecaterina Teodoroiu", Târgu-Jiu.

Clasa a V-a: PÂRVĂNESCU V. EUGENIA (V: 957*, 8, 63, 4, 5, 7, 70, 3, 4, 8, 9, 81, 2).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa a IV-a: FLONDOR I. I. (IV: 802, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2*, 3, V: 955, 6, 60, 1*, 2*, 3, 4, 5, 8, 70, 1002*, VII: 935, E. G.: 975, 6, 9, 80, 1, 2, 3); GIURCONIU GH. (IV: 795, 6, 801, 2, 3, 4, 5, 6); MĂRTOIU C. C. (IV: 807, 8, 9, 10, 1*, 2*, 3, V: 963, 4, E. G.: 779, 80, 1, 2, 3); OPROIU I. A. (IV: 802, 3, 4, 5, 6, E. G.: 779, 80, 1, 2); POPESCU L. (IV: 810, 3); SPĂTARU I. N. (IV: 802, 3, 4, 5, 6, 10).

Clasa a V-a: CATRINESCU E. T. (V: 963, 4, E. G.: 779, 80, 1); CIUCIUC I. N. (V: 955*, 7, 9*, 61*, 2*, 3, 4, 5, 6, VI: 978*, E. G.: 779, 80, 1); POPESCU I. I. (V: 963, 4, E. G.: 779, 80, 1).

Clasa a VI-a: ANDRIȚOIU I. P. (VI: 983, 5, 6, 9*, 93*); BLEJAN GH. (VI: 983, E. G. 775); COANDA C. I. (VI: 981, 2, 3, 5, 91, 4, 5, 7, 9, 1002, 3, 4, 5, E. G.: 786, 8); COICA V. I. (E. G.: 779, 80, 1, 2, 3); COSOROABĂ G. V. (VI: 979, 80, 2, 4, 5, 8, 9, 93*, 7, 1003, 4, 5, 6, 7, 9, 10, VII: 937, 44, E. G.: 779, 80, 1, 2, 3, 8); CURDARU V. (VI: 975, 9, 81, 2, 94, 5, 7, 9, 1002, 3, 4, E. G.: 784, 6, 8); DANCIU D. I. (VI: 987, 9, 91, 3*); DĂNESCU GH. (VI: 978, 81, 2, 3, 5, 6, 9, 91, 5, 7, 9, 1003, 4, E. G.: 784, 6, 8); DIJMĂRESCU I. D. (VI: 983, 5); FUIOREA I. D. (VI: 978, 80, 1, 3, 4, 5, 94, 5, 7, E. G.: 777, 8, 82, 3); HUREZEANU R. (VI: 879, 944, 78, 9, 81, 2, 3, 5, 91, 7, 9, 1002, 5, VII: 953, E. G.: 784, 6, 8). ISAC N. P. (VI: 983, 5, 6, 8, 9, 94, 5, 7, 9, 1002, 4, 5, VII: 935, E. G. 782, 6, 8); GOLOGAN G. V. (VI: 980, 2, 3).; MOȚET A. D. (VI: 979, 80, 3, 4, 5, 9*, 93, E. G.: 779, 80, 1); NEGUȚ, A. I. (VI: 981, 2, 94, 5, 7, 9, 1002, 3, 4, 5, 9, 10, 16, VII: 935, 53, 65, 7, VIII: 879, 81, 2, E. G.: 775, 6, 7, 8, 80, 1, 3, 4, 6, 8*, 9, 91); PĂIȘANU B. I. (VI: 944, 83, 97, 1003, 4, E. G.: 788); PACOSTE C. C. (VI: 983, 5, VII: 935); POPESCU I. A. (VI: 983, E. G.: 779, 80, 1); POPESCU V. I. (VI: 1003, 4, E. G.: 779, 80, 1, 2, 3); PREOȚESCU E. (VI: 983*, 5); PRUNESCU V. I. (VI: 980, 2, 3, 5, VII: 937); TĂMĂȘESCU D. V. (VI: 937, 78, 80, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 91).

Clasa a VII-a: BADEA N. M. (VII: 941, 2, 3, 4, 5, 6*, 7, 8*, 9, 50*, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 61*, 2, 3*, 4, 5, 6*, 8, 9*, 70*, 1, 2, 3, 4, 5, E. G.: 780*, 1, 2, 3*, 4); BĂRBOI C. C. (VII: 943, 4, 6, 7, 52); MOREGA V. T. (VII: 941, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 50, 2, 3, 56, 7, 9, 61, 3, 4, 8, E. G.: 779, 80, 1, 3); PĂSĂRIN GH. (VII: 930, 5, 42, 3, 5, 6, 7, 8*, 9*, 50, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 69, 70, 1, 4, 5, E. G.: 779, 80, 1, 4, 8); POPESCU M. (VII: 931, 2, 3, 8, E. G.: 772, 9); SÂRBU N. M. (VIII: 969, 70, 4); VELICAN J. (VII: 941, 2, VIII: 861).

Clasa a VIII-a: BĂLĂ V. C. (VIII: 869, 72, 7, 8, 9, 80, 3, 4, E. G.: 788*); CIORĂSCU C. A. (VIII: 866, 7, 8); PĂTRĂȘCOIU N. P. (VIII: 861, 6, 9, 70, 1, 2, 4, 5, E. G.: 775, 6, 9, 81, 3).

Liceul Comercial din Târgu-Jiu.

Clasa a V-a: SGUROIU ȘT. V. (V: 975*, 7 VI: 977, 97, 1003, E. G.: 788).

Liceul „Papiu Ilarian", Tg.-Mureș.

Clasa a VII-a: PAPUC I. D. (VII: 953, 9, 63, 1, 55, 6, 7).

Liceul de fete „Carmen Sylva", Timişoara.

Clasa a IV-a: GÂRLEŞTEANU ELIZA (IV: 802, 3, 4, 5,* 6*, 7, 8, 9, 10, 12, 3, 5, 6, 7, V: 963, 4, 8, 79, 81, VI: 1002, VI: 1002, VIII: 875, 82, E. G.: 775, 6, 9, 80, 1, 2, 3, 8); NOVAC CORNELIA (IV: 795, 6, 7, 8, 9, 800, 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Clasa a V-a: TRUFIN CECILIA (V: 955, 7, 8, 60, 3, 4, 5, 6, VI: 978).

Clasa a VI-a: BUSUIOC TEODORA (VI: 986*, 8, 9, 91, 4, 1000, 1*); DUMBRAVĂ AURORA (VI: 986, 91); GĂVAN VALERIA (VI: 986, 8, 91, 4, 1000).

Clasa a VII-a: IONESCU VICTORIA (VII: 935, 6, 45); PETER VALERIA (VII: 935, 6, 7).

Liceul „C. D. Loga", Timişoara.

Clasa a V-a: ZIEGLER M. (V: 956, 60, 3, 4).

Clasa a VII-a: ROMAN I. C. (VII: 939, VIII: 871, 5, E. G.: 775, 82, 3); RUJAN C. M. (VII: 933, 47, 8).

Clasa a VIII-a: BÂRZU S. ŞT. (VIII: 866, 70, 4, 5, 7, 8, 9, 82, 91); CÂRCIU A. I. (VIII: 862, 70, 2, 4, 5, 8, 80, E. G.: 780, 1, 2, 3, 4, 7); GÂRLEŞTEANU M. M. (VIII: 862, 6, 9, 70, 4, 5, E. G.: 775, 8, 9, 83); PISANCA N. I. (VIII: 846, 52, 61, 9, 74, 5, 8, 9, E. G.: 770, 3, 9, 82).

Liceul Armatei „Mihai Viteazu", Timişoara.

Clasa a IV-a: BARBĂLATĂ I. (IV: 800, 2, 3, 4, 6, 10, 1, 2, 3); BONEANU F. (IV: 805, 6, 9, 10, 3); BOTA T. (IV: 802, 3, 4, 6, 12, 3); CIBIAN S. (IV: 802, 3, 4, 6, 9, 10, 2, 3); COLIBAN D. (IV: 802, 3, 4, 6); DINCĂ N. I. (IV: 802, 3, 4, 6, 8, 10, 1, 3, 4); ECOBICI P. GH. (IV: 802, 3, 4, 10); FRANDOS E. (IV: 802, 4); FURDUI R. A. (IV: 802, 3, 4); ILEA G. V. (IV: 802, 3, 4, 6, 11, 4); MĂRCULESCU V. (IV: 802, 3, 4, 11, 4); MOGOŞ A. N. (IV: 802, 3, 5, 6, 9, 10, 1); NOP H. (IV: 812, 3); RĂDULESCU I. (IV: 802, 3, 4, 6, 9, 10, 3); ROŞU FL. (IV: 802, 4); STOICA T. (IV: 805, 7); STOICESCU I. G. (IV: 802, 3, 4, 6); TATIC E. (IV: 802, 3, 4, 12, 3); TOMESCU M. (IV: 802, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 5, 6); ZUGRAVU L. (IV: 802, 3, 4, 6, 9, 10, 1).

Clasa a V-a: ARIŞANU A. I. (V: 955, 8, 62, E. G.: 779, 80); BACIU G. E. (V: 961, 8); BĂDESCU D. B. (V: 955, 62, 5, 6, 8, 79, 80, E. G.: 781); BERBESCU O. (V: 955); BUCURENCIU N. GH. (V: 968, 79); BUJANCĂ V. (V: 955, 8, 61*, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 81); CUCU I. E. (V: 965, 6, 8, E. G.: 779, 80); DĂNICIUC G. N. (V: 955, 7, 8, 62, 3, 5, 8, E. G.: 779); DIACONESCU I. (V: 955, 6, 60, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 9, 80, 1, E. G.: 781); DONEA M. ST. (V: 957, 8, 62*, 3*, 4*, 8, E. G.: 779); DUMITRESCU G. (V: 957, E. G.: 781); EPURE GH. C. (V: 955, 7, 8, 61*, 2, 5, 6, 8, 70, 1, 2, 9, 81, E. G.: 779, 81); ENESCU D. (V: 955, 9); FIRESCU A. (V: 955, 7, 8, 62); FLOREA G. V. (V: 955, 7, 8, 62, 3, 6, E. G.: 780); GĂGEANU N. (V: 958); JIVU I. I. (V: 955, 63, 8); MATEESCU I. R. (V: 955, 8, 66, E. G.: 781); MACARIE GH. M. (V: 955, 61, 2, 8, 79, E. G.: 779); MUJA I. GH. (V: 955, 61, 2, E. G.: 780); NECULA N. V. (V: 955, 7, 8, 61, 2*); PĂŞOI N. (V: 955, 7, 8, 9, 65, 6, E. G.: 779, 80, 1); POPESCU N. GH. (V: 955, 8, 62, 6, E. G.: 779, 80, 1); POPESCU S. G. (V: 957,

62*, 5, 6, 8, E, G.: 779, 80, 1); ROȘCA M. (V: 958, 62, 6, E. G.: 779, 80, 1); STĂNICĂ D. GH. (V: 958, E. G.: 780, 1); TRACHE G. (V: 755, 7, 8, 61, 2, E. G.: 779, 81); TÂRLIE I. (V: 955, 7, 8, 61, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 72, 9, 80, E. G.: 788).

Clasa a VI-a: ANDRONESCU I. M. (V: 989); ANGHELESCU A. (VI: 981, 2, 3, 9); BĂIEȘU D. (VI: 989, E. G.: 779); BRABORESCU S. (VI: 991); COCOȘ GH. (VI: 944, 67, 78, 9, 80, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 91, 5, 7, 1001, 2, 3, 5, 8, VII: 927, 8, 9, 30, 1, 2, 3, E. G.: 775, 6, 8, 80, 1, 3); DAIA N. B. (VI: 982, 3, 91); EMANDI P. M. (VI: 982, 3, 7, 9, 91, E. G.: 779); GALICEANU A. (VI: 944, 82, 7, 99); IONESCU C. (VI: 989, 1005, E. G.: 779); LĂCĂTUȘ G. C. (VI: 980, 1, 2, 3, 9, 91, E. G.: 779); MOLDOVEANU C. (VI: 983, 4, 9, 91, 4, 5, 7, 9, 1001, 2, 3, 5, 8); MIHALACHE I. ȘT. (VI: 989, E. G.: 781); MOGOȘANU D. (VI: 991, E. G.: 779); MOROIANU D. A. (VI: 978, 9, 80, 1, 2, 3, 4, 5, 94, 5, 7, 9, 1001, 5, VII: 927, 9, E. G.: 775, 6, 9); NICULESCU L. (VI: 989); NEAGU M. (VI: 944, 67, 78, 80, 2, 4, 5, 99, 1005, VII: 927, 8, E. G.: 775, 8, 9, 80, 1); NIȚESCU P. (VI: 978, 81, 2, 3, 95, 9, E. G.: 775, 6); OPRIȘ GH. D. (VI: 944, 78, 80, 2, 3, 4, 9, 95, 1001, 8); PANĂ R. (VI: 982, 3, 9, 91, 5, 9); PETCULESCU P. (V: 980, 3, 5); PESCARU GH. (VI: 978, 82, 4, 9, 91, E. G.: 775, 6, 8); POPESCU N. J. (VI: 989, 91, E. G.: 779); POSEA GH. (VI: 979, 89); ROGOZ V. T. (VI: 978, 9, 82, 3, 4, 91, 5, 9, 1001, 2, 3, 5, 8); ROMAN L. (VI: 989, 91); ȘTEFĂNESCU I. Ș. (VI: 988, 9, 91, 4, 5, 7, 9, 1001, 2, VII: 929, VIII: 852, E. G.: 779, 80, 1, 2, 3); TĂTARU S. (VI: 944, 78, 80, 3, 4, 9, 91, 9, 1005, 8, E, G.: 779); TRIFU I. V. (VI: 978, 80, 1, 2, 3, 91); URDĂREANU P. (VI: 978, 80, 2, 3, 5, 91, 5, 7, 9, 1001, 2, E. G.; 775, 9); VASILESCU G. (VI: 978, 81, 2, 3, 5, 9, 91, 4, 5, 7, 9, 1001, 2, 3, 5, 8, E. G.: 779, 82, 3); VELICA M. (VI: 778, 9, 82, 3, 9); VINTILĂ C. V. (VI: 983, 4, 9, 91); ZGĂVĂRDICI A. (VI: 981, 2, 9, 91, 5, 9, 1002, 5).

Clasa a VII-a: GHEDERIM A. (VII: 934, 6, 7, 8, 9, 40*, E. G.: 775, 6); IANCULESCU ST. ST. (VII: 934, 6, 7, 8, 9, 40*, E. G.: 775, 6); LICĂ ST. I. (VII: 934, 41, 5, 6, 7, 50*, E. G.: 779, 81); NICOLESCU I. V. (VII: 946, 50, E. G.: 780, 1, 3); SĂNDULESCU C. I. (VII: 934, 6, 7, 8, 9, 40, 1, 2, 5, 6, 7, 8*, E. G.: 779, 80, 1, 2, 3); STĂNESCU N. I. (VII: 939, 40, 1, 2, 6, E. G.: 780); STOICHIȚĂ I. M. (VII: 941, 2, 5, 7).

Clasa a VIII-a: ADOMNICHI V. (VII: 861, 6, 8*, E. G.: 775); BARANGA M. (VIII: 846, 61, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 5, 6, E. G.: 775, 9, 801, 2, 3); BAZ M. (VIII: 861, 6, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 5, 6, E. G.: 775, 9, 80, 1, 2, 3); CHIRAN P. (VIII: 861, 9, 71, 5, E. G.: 776, 82, 3); DUMITRESCU A. (VIII: 846, 61, 6, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 4, 5, 6, E. G.: 775, 6, 82, 3); FĂGĂRĂȘANU I. I. (VIII: 846, 69, 9, 70, 1, 2, 3, 5, E. G.: 775, 6, 80, 1, 2, 3); GĂLEA H. (VIII: 846, 61, 6, 8, 9, 70, 1, 2, 82, 3, 5, E. G.: 775, 6); IONESCU C. (VIII: 846, 61, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 5, 6, E. G.: 775, 82, 3); JANCA SP. (VIII: 846, 61, 6, 7, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 80; E. G.: 776, 9, 80, 1, 2); MANTA I. N. (VIII: 846, 61, 6, 70, 1, 2, 5, 6, E. G.: 775, 6, 9, 80, 1, 2, 3); MAN A. (VIII: 846, 62, 4, 6, 7, 9,70, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 80, 1, 2, 3, E. G.: 775, 9, 80, 1, 2, 3); MĂRĂNDICI A. (VIII: 861, 9, 70, 2, 3, 5*, 80, 1, 3, E. G.: 776, 83); PANAIT I. (VIII: 846, 61, 6, 9 70, 1, 2, 3, 5, E. G.: 775, 6, 9, 82, 3); PÂRVU I. (VIII: 846, 61, 6, 9, 70, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 80, 1, E. G.: 781, 2, 3); PAVEL N. (VIII: 846, 61, 6, 9, 70,

1, 2, 3, 5, 6, E. G.: 776); RĂUȚU T. (VIII: 846, 64, 6, 7, 8, 9, 70, 4, 5, 80, 1, E. G.: 770, 1, 2, 3, 5, 6, 83); RĂDULESCU V. (VIII: 846, 61, 9, 70, 1, 2, 3, 4, 5, 6, E. G.: 775, 6, 9, 80, 1, 2, 3); STANCU G. N. (VIII: 846, 61, 6, 8, 9, 71, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 80, 1, E. G.: 775, 6, 9, 80, 1, 2); STANCIU P. (VIII: 846, 61, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 71, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 80, 1, 3, 5, 6, 9); ȘTEFAN I.: (VIII: 846, 61, 6, 7, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 5, 6, E. G.: 775, 6, 9, 80, 1, 2, 3); SCURTU G. (VIII: 861, 9, 71, 3, E. G.: 776, 83); TATOMIR D. I. (VIII: 846, 69, 7, 8, E. G.: 775); UDREA I. M. (VIII: 846, 61, 9, 70, 2, 3, 6, E. G.: 775, 6, 82, 3); VOINEA I. ȘT. (VIII: 846, 61, 6, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 4, 5, 6*, E. G.: 775, 6, 9, 801, 2, 3); VASILE F. (VIII: 875, 82, E. G.: 769, 70, 2, 9, 80).

Liceul Izraelit din Timișoara.

Clasa a VII-a: ERDOS D. ANA (VII: 934, 6, 8*, 9, 48); FUNT CARMEN (VII: 942, 7, 55, 60, 1, VIII: 847, 9, 50).

Clasa a VIII-a: DEUTSCH G. EMIL (VIII: 866*).

Liceul „Regele Ferdinand I", Turda.

Clasa a VI-a: AVRAM N. A. (VI: 1003, E. G.: 781).

Clasa a VIII-a: UNGUREANU N. (VIII: 878, 9, 83, 4, 5).

Liceul „Traian" Turnu-Severin.

Clasa a IV-a: BĂGHINĂ V. A. (IV: 796. 809, 10, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, V: 963, 4, 5, 81, 2, 9, VI: 1009, VIII: 887, E. G.: 767, 81, 3, 4, 8); CATAMANIC N. N. (IV: 797, 9, 800, 2, 3, 4); FLUERAȘ N. C. (V: 957); IONESCU I. TH. (IV: 795, 809, 10, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7, 20, V: 970); NICOLICIOIU ST. V. (IV, 797, 9); ȘTEFĂNESCU I. V. (IV: 810, 2, 3); TRĂILESCU C. S. (IV: 797, 8, 9, 800).

Clasa a V-a: CĂRBUNARU T. I. (V: 957, 8, 60, 70, 2, 4, 9, 81, 2); NEAGOE M. N. (V: 955); STEGĂROIU S. P. (V: 963, 4, 5, 6, 70, 1, 2, 4, 81, 2).

Clasa a VII-a: STOICEA P. S. (VII: 934, 7, 8, 9, 40, 1, 2, 3, 6, 7).

Clasa a VIII-a: CARAVIAS P. N. (VIII: 869*, 70*, 4*, 5*, 7).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Ianuarie 1948

Clasa a III-a. *Exerc. 337.* Să se arate că

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)<\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$<\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)<\frac{1}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}.$$

C. I. Ț.

III. 338. Care este cel mai mare bipătrat perfect (număr din care se poate extrage rădăcina a patra, fără rest), care se cuprinde în numărul 20.753? Să se arate că acest număr se poate descompune într'o sumă de trei bipătrate perfecte.

V. GH.

III. 339. Pe laturile unui triunghiu echilateral ABC purtăm în acelaşi sens, lungimile egale BM, CN, AP. Dacă O este centrul triunghiului atunci şi lungimile OM, ON, OP sunt egale.

Clasa a IV-a. *Exerc. 821.* Să se verifice egalitatea

$$1-(\sqrt{5}+2)(\sqrt{10}+5\sqrt{2}-10)=(\sqrt{10}-3)(5\sqrt{2}-7).$$

C. I. Ţ.

IV. 822. Să se construiască segmentele x, y, z date de relaţiile

$$x^2=3^2+4^2+12^2;\quad y^2=13^2-12^2-3^2;\quad z^2=13^2-12^2-4^2.$$

E. M.

IV. 823. Două cercuri O şi O′ sunt secante având coarda comună $\overline{AB}=5$ cm. Se dă că $\overline{AB}$ este pentru cercul O, latura pătratului înscris, iar pentru cercul O′ este latura triunghiului echilateral înscris. Se cere: 1° Să se construiască cercurile şi cele două poligoane regulate menţionate, cu $\overline{AB}$ latura comună; 2° Să se calculeze perimetrul şi aria părţii comune celor două cercuri.

V. GH.

IV. 824. Fie

$$x=\frac{a^2+b^2}{2-a^2b},\quad y=\frac{1-b^2}{a^2},\quad z=\frac{3ab}{4-a^3};$$

să se arate, pentru $a=4$, $b=-5$, că

$$x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

N. M.

IV. 825. Fie D şi D′ două drepte oarecare în spaţiu; A şi B două puncte pe dreapta D, iar A′ şi B′ două puncte pe dreapta D′. Să se arate că dreptele AB′ şi A′B nu se pot întâlni, dacă D şi D′ nu sunt în acelaşi plan.

Clasa a V-a. *Exerc. 998.* Să se arate că expresiile

$E_1 = (a-b)(b-c)(c-a)$, $E_2 = a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$,

$E_3 = -a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$,

$E_4 = -ab(a-b)-bc(b-c)-ca(c-a)$,

$E_5 = a(1+b)(1+c)(b-c)+b(1+c)(1+a)(c-a)$
$+c(1+a)(1+b)(a-b)$,

$E_6 = -ab(a-b)(1-c)-bc(b-c)(1-a)-ca(c-a)(1-b)$,

$E_7 = -(a-b)(1-bc)(1-ca)-(b-c)(1-ca)(1-ab)$
$-(c-a)(1-ab)(1-bc)$,

$E_8 = (a-b)(1+bc)(1+ca)+(b-c)(1+ca)(1+ab)$
$+(c-a)(1+ab)(1+bc)$,

$E_9 = \frac{1}{2}[(a-b)(1+ab)(1+c^2)+(b-c)(1+bc)(1+a^2)$
$+(c-a)(1+ca)(1+b^2)]$,

$E_{10} = -\frac{1}{2}[(a-b)(1-ab)(1-c^2)+(b-c)(1-bc)(1-a^2)$
$+(c-a)(1-ca)(1-b^2)]$

sunt egale între ele.

C. I. Ţ.

V. 999. Să se verifice identitatea

$$\Sigma m^2(b+c)^2 - \Sigma a^2(n+p)^2$$
$$= 2[\Sigma bc(m+n)(m+p) - \Sigma np(a+b)(a+c)].$$

N. M.

V. 1000. Să se verifice identitatea

$$(x+y+z)^2(x'+y'+z')$$
$$= \Sigma(-x+y+z)^2(-x'+y'+z') + 8\Sigma x'yz.$$

Caz particular: $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$.

N. M.

V. 1001. Se dau expresiile

$$E_1 = -x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$
$$E_2 = x_1 - x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$
$$E_3 = x_1 + x_2 - x_3 + \ldots + x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$E_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots - x_n$$

1°. Să se calculeze suma $S = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_n$.

2°. Pentru ce valoare a lui n avem $S = 0$ oricare ar fi $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$?

3°. Pentru ce valoare a lui n avem $S = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$?

V. GH.

V. 1002. Notând cu $P(m)$, rezultatul înlocuirii lui x prin m în polinomul $P(x) = ax^2 + bx + c$, să se demonstreze relația

$$P(a+b) - P(a-b) = 2b(2a^2 + b).$$

V. GH.

V. 1003. Să se determine λ, astfel ca expresia

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) + \lambda abc.$$

să fie divizibilă prin $(a+b+c)$. Generalizare.

G. D. S.

V. 1004. Prin vârful A al unui triunghiu oarecare ABC ducem paralela xx' la latura BC. Bisectoarele unghiurilor xAB și x'AB taie dreapta BC respectiv în D și D'. Să se arate că punctele A, D, D' sunt pe un cerc cu centrul în B.

C. I. Ț.

V. 1005. Să se construiască un triunghiu isoscel ABC ($\overline{AB} = \overline{BC} = l$, dat), știind că înălțimea din A trece prin mijlocul segmentului care unește mijloacele laturilor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$.

V. GH.

Clasa a VI-a. *Exerc. 1018.* Să se scrie sub forma cea mai simplă, expresia numerică

$$E = \frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}+1}{\sqrt{11}-\sqrt{7}+4} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}-4}.$$

G. D. S.

VI. 1019. Să se arate că

$$\frac{1}{1-x^2} \pm \sqrt{\frac{1}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{1-x^2}} = \frac{1}{1 \mp x};$$

$$\frac{1}{1 \pm \sqrt{1-\frac{1}{x}}} \pm \sqrt{x(x-1)} = x.$$

C. I. Ţ.

VI. 1020. Considerăm două progresii, una aritmetică şi alta geometrică, începând amândouă cu 5; diferenţa între termenii ai doilea este egală cu 3 şi între termenii ai treilea este 26; cât va fi diferenţa între termenii ai cincilea?

VI. 1021. Să se arate că pentru $-1 < x < 1$ avem

$$1 + \frac{1+x^2+x^4+x^6+\ldots}{(1-x+x^2-x^3+\ldots)^2} = 2(1+x+x^2+x^3+\ldots).$$

C. I. Ţ.

VI. 1022. Să se calculeze expresia

$$E = \frac{\sqrt[6]{47{,}6^5}\ \sqrt[12]{32{,}5^7}\ \sqrt[5]{12{,}6^6}}{\sqrt[11]{28{,}6^9}\ \sqrt[13]{11{,}56^5}}.$$

VI. 1023. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul O şi fie A' diametralul lui A, iar D intersecţia cercului O cu bisectoarea unghiului A. Să se arate că

$$\sphericalangle DOA' = B - C \quad \text{sau} \quad C - B.$$

Gh. B.

VI. 1024. Se dă un cerc O, un punct fix A pe acest cerc şi un unghiu înscris constant, MAN. Să se afle locul geometric al intersecţiei dreptei AN cu perpendiculara ridicată în punctul M pe dreapta AM.

V. GH.

VI. 1025. Două plane P şi Q se taie după dreapta Δ; o dreaptă D taie planele P şi Q în A şi B. Două plane R şi S duse prin dreapta D taie pe Δ în I şi J. ABIJ este un patrulater strâmb în care fiecare latură este intersecţia a două dintre plane şi fiecare vârf este intersecţia a câte trei plane. Un al cincilea plan T taie pe AI, AJ, BI, BJ în punctele M, N, P, Q. Dreptele MN, PQ se taie pe Δ.

Clasa a VII-a. *Exerc. 976.* Se consideră suma

$$S = (1) + (2+3) + (4+5+6) + \ldots$$

Să se calculeze suma termenilor închişi în a n^a paranteză.

V. GH.

VII. 977. Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt[3]{a^{x+\frac{1}{2}}\sqrt[4]{a^{3(x+2)}}} = \sqrt[6]{a^{2x+3}}\,\sqrt[12]{a^{5(x+2)}}$$

şi să se verifice soluţia aflată.

I. I. S.

VII. 978. Să se arate că

$$\frac{\dfrac{1 \pm \sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1 \pm \sin x}}{\dfrac{1 \pm \cos x}{\sin x} + \dfrac{\sin x}{1 \pm \cos x}} = \operatorname{tg} x.$$

C. I. Ţ.

VII. 979. Să se rezolve un triunghiu dreptunghic, cunoscând suma l a ipotenuzei cu înălțimea relativă la ea și un unghiu ascuțit, B. Aplicație numerică: $l = 432{,}25\ m$, $\sphericalangle B = 60^0$.

V. GH.

VII. 980. O familie are invitați la masă. In total sunt 7 persoane, între care, doi copii. In câte feluri se pot așeza cele 7 persoane la masă, astfel ca cei doi copii să stea alături?

G. D. S.

VII. 981. Să se verifice că

$$C_9^0 C_8^4 C_{17}^4 - C_9^1 C_7^4 C_{16}^4 + C_9^2 C_6^4 C_{15}^4 - C_9^3 C_5^4 C_{14}^4 + C_9^4 C_4^4 C_{13}^4 = C_8^4.$$

N. M.

VII. 982. Să se verifice că

$$(x+a)^5 - 5a(x+a)^4 + 10a^2(x+a)^3 - 10a^3(x+a)^2 + 5a^4(x+a) - a^5 = x^5.$$

VII. 983. Să se arate că

$$x^6 + \frac{1}{x^6} - x^4 - \frac{1}{x^4} + x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \left[6 + 5\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^4\right] + 2;$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} - x^5 - \frac{1}{x^5} + x^4 + \frac{1}{x^4} - x^3 - \frac{1}{x^3} + x^2 + \frac{1}{x^2} - x - \frac{1}{x}$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 + 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 6\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2.$$

C. I. Ț.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 906.* Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 & b \\ a^2 & 2a & 1 & b^2 \\ a^3 & 3a^2 & 3a & b^3 \end{vmatrix}.$$

V. C.

VIII. 907. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & b & 1 \\ a^2 & 2a & b^2 & 2b \\ a^3 & 3a^2 & b^3 & 3b^2 \end{vmatrix}.$$

V. C.

VIII. 908. Să se arate că determinantul

$$\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \sin(a+b) \\ \cos b & -\sin b & \cos 2b \\ \cos a & \sin a & \cos(a-b) \end{vmatrix}$$

este identic nul.

I. I. S.

VIII. 909. Se dau pe o axă, punctele A şi B. Fie M punctul care împarte segmentul AB în raportul λ (M, interior) şi N, punctul exterior care împarte acelaşi segment în raportul $\frac{1}{\lambda+2}$. Să se demonstreze că reciproc: punctul A împarte segmentul MN în raportul λ (A, interior), iar punctul B (exterior) împarte acelaşi segment în raportul $\frac{1}{\lambda+2}$.

G. D. S.

VIII. 910. Pe dreapta $x - y + 1 = 0$ se consideră trei puncte A, B, C cu abscisele în progresie aritmetică cu raţia 1. Să se determine coordonatele punctelor, astfel ca

$$\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 9 = \overline{OB}^2.$$

I. I. S.

VIII. 911. In patrulaterul ABCD, fie O intersecţia diagonalelor; avem relaţiile

$$(\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 + 2\,\overline{OB}\cdot\overline{OD})\,\overline{BD} = (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2)\,\overline{OD} + (\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2)\,\overline{OB}$$

$$(\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + 2\,\overline{OA}\cdot\overline{OC})\,\overline{AC} = (\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2)\,\overline{OC} + (\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2)\,\overline{OA}.$$

N. M.

VIII. 912. Fie A_1A_2 una din laturile decagonului regulat stelat. Luând această latură şi perpendiculara pe ea ca axe de coordonate, să se scrie ecuaţiile celorlalte laturi ale decagonului.

GH. B.

VIII. 913. Să se verifice că dacă derivăm, în raport cu m, identitatea lui MOIVRE

$$(\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx$$

obţinem identitatea lui EULER. Dar dacă derivăm în raport cu x?

Exerciţii Generale. *Exerc. 795.* Să se găsească două patrate de câte 4 cifre, care diferă între ele prin *aaaa*.

E. G. 796. Să se rezolve în numere întregi, ecuaţia

$$xy = x - y.$$

C. I. Ţ.

E. G. 797. Să se găsească numerele *aba*, *bab* astfel încât indicatorul mediei lor aritmetice să fie un pătrat perfect.

V. GH.

E. G. 798. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-x}-\sqrt{\sqrt{2}+x}}{\sqrt{\sqrt{2}+x}+\sqrt{\sqrt{2}-x}}=x-\sqrt{2}.$$

I. I. S.

ERATA. La pag. 151, rândul 3, în loc de *c* se va pune *i.*
La pag. 157, ultimul rând în loc de *r* se va pune 2.
La pag. 160, Exerciţiile Generale au numerele, 791, 2, 3, 4.

INSTRUCŢIUNI

a) Soluţiile exerciţiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală, ca foaia de caiet obişnuit şi paralel cu lăţimea.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluţionarea unui exerciţiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile ce vor fi necesare pentru urmărirea exerciţiului se vor construi îngrijit.

Nu se va trimite soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie.

b) Redactarea soluţiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numele rezolvitorului în ordinea următoare: Numele de botez, iniţiala părintelui, numele de familie, urmat de clasa şi şcoala pe care o urmează.

Dedesupt se va scrie enunţul astfel cum este publicat în revistă cu numărul exerciţiului apoi soluţia clar compusă şi îngrijită scrisă, iar la sfârşit iscălitura rezolvitorului.

c) Nu se vor lua în considerare soluţiile iscălite de doi sau mai mulţi corespondenţi sau copiate unele după altele, nici soluţiile exerciţiilor propuse la clase inferioare aceleia în care se află corespondentul.

d) Soluţiile se primesc timp de trei luni dela propunerea exerciţiului, numai dela abonaţii „Suplimentului cu Exerciţii" al Gazetei Matematice, pe adresa Casa Gazeta Matematică, Ing. C. Ionescu-Ţiu, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2. Pe plic sau pachet se va menţiona numele, localitatea, şcoala şi clasa rezolvitorului.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând şi probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societăţii „Gazeta Matematică" au apărut şi se găsesc următoarele:

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 150

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 180

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de analitică.* Ediţia II. Partea II adăogită de **N. G. Botea** şi **C. Ionescu-Bujor** . . . . . Lei 250

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a Istoric), învăţăminte. Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 100

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanică raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.500

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 320

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 400

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul Anghel Saligny)

I. **Ion Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 100

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 250

Pentru biblioteci şi autorităţi toate preţurile se triplează.

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din „Gazeta Matematică" de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru vol. LIII abonamentele sunt:

Pentru profesori, studenţi şi elevi . . . . . Lei 480

Pentru autorităţi şi biblioteci . . . . . Lei 1.500

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ — C. 42.610

8 1 1

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XIV. No. 2 1 NOEMBRIE 1947

9692

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 7-3803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XIV. No. 2 — 1 NOEMBRIE 1947

ABONAMENTUL LEI 180 PE AN (9 numere)

Pentru instituţii şi biblioteci lei 400

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa: ING. C. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică». Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa a V-a. *Exerc. 941. Dacă* $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ *avem şi* $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Soluţie. Inmulţim relaţia de condiţie succesiv cu a, b, c şi adunăm.

V. 947. In triunghiul ABC, *perpendicularele în* A *pe* AB, AC *taie cercul circumscris în* B', C'; *tangentele în* B', C' *fac un unghiu cât dublul complementului unghiului* A.

Soluţie. Fie T intersecţia celor două tangente; avem

$$\text{măs.} \sphericalangle B'TC' = 180^0 - \text{măs. arc. } (AC' + AB').$$

Dar

$$\text{măs. arc. } AC' = 180^0 - 2.\,\text{măs.} \sphericalangle B, \text{ măs. arc. } AB' = 180^0 - 2\text{măs.} \sphericalangle C$$

deci

$$\sphericalangle B'TC' = 180^0 - (360^0 - 2B - 2C) = 2(B+C) - 180^0 = 180^0 - 2A$$

Altă soluţie. Diametrii BB' şi CC' se taie în centrul O al cercului; unghiul B'TC' este suplimentar cu $B'OC' = BOC$ deci egal cu $\sphericalangle B'BC + \sphericalangle C'CB = \sphericalangle B'AC + \sphericalangle C'AB$, ultimele două unghiuri fiind fiecare complimentare lui A.

V. 961. Fie D, E, F *punctele de contact ale cercului înscris în triunghiul* ABC. *Dreptele* DE, DF *taie paralela din* A *la* BC *în* G *şi* H. *Avem*

$$\overline{AE} = \overline{AF} = \overline{AG} = \overline{AH}.$$

Soluţie. Tangentele din acelaşi punct la un cerc sunt egale

$$\overline{AE} = \overline{AF},\ \overline{CD} = \overline{CE}.$$

Urmărim pe figură $\sphericalangle AGE = \sphericalangle EDC = \sphericalangle DEC = \sphericalangle AEG$ deci şi triunghiul EAG este isoscel şi analog FAH.

V. 962. Fie M *un punct pe ipotenuza* BC *a triunghiului dreptunghic* ABC; *o dreaptă arbitrară dusă prin* M *taie cercul* ABM *în* E *şi cercul* ACM *în* F. *Dreptele* AE, AF *sunt perpendiculare.*

Soluţie. Unghiurile ABM, AEM sunt egale ca subîntinzând acelaşi arc AM în cercul ABEM; în acelaşi mod unghiurile AFM şi ACM sunt egale. Triunghiul EAF este astfel, asemenea cu BAC, deci dreptunghic.

Clasa a VI-a. *Exerc. 1008. In triunghiul* A B C, *fie* B', C' *picioarele înălţimilor din* B *şi* C; *fie încă* M *şi* M' *mijloacele segmentelor* BC, B'C'. *Avem*

$$\overline{MM'} = R \sin^2 A,$$

R *fiind raza cercului circumscris.*

Soluţie. Unghiurile BC'C şi BB'C sunt drepte; patrulaterul BC' B'C este înscris în cercul de centru M; triunghiul B'MC' este isoscel; MM' este înălţime.

Triunghiul B'MC fiind isoscel, $\sphericalangle MB'C = C$. Pe de altă parte $\sphericalangle AB'C' = B$. Deci unghiul M'B'M este egal cu unghiul A.

Rezultă $\overline{MM'} = \overline{MB'} \sin MB'M' = \frac{1}{2}\overline{BC} \sin A = R \sin^2 A.$

Clasa a VII-a. *Exerc. 920. Să se arate că*

$$\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 1 \\ \cos\theta & \sin\theta & \sin 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta & \sin 3\theta \end{vmatrix} = 0.$$

Soluţie. Inmulţim prima coloană a determinantului cu $\sin\theta$, pe a doua cu $\cos\theta$ şi le adunăm; obţinem elementele liniei a treia.

VII. 946. Dacă $(y - 3x)^3 = y - 2x$, *atunci*

$$\frac{y' - 2}{y' - 3} = 3\frac{y - 2x}{y - 3x}.$$ *Generalizare.*

Soluţie. Considerăm funcţia $y(x)$ definită de relaţia

$$(y - ax)^m = k(y - bx)$$

pe care o derivăm sub această formă:

$$m(y - ax)^{m-1}(y' - a) = k(y' - b).$$

Deci $$\frac{y' - b}{y' - a} = \frac{m}{k} \cdot \frac{(y - ax)^m}{y - ax} = m\frac{y - bx}{y - ax}.$$

VII. 947. Să se deriveze funcţia

$$y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} - 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}$$

Soluţie. Notăm

$$y_1 = \arcsin u\,,\quad u = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$y_2 = \operatorname{arc\,tg} v,\quad v = \frac{1-x}{1+x}$$

şi avem

$$y_1' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'\,,\quad y_2' = \frac{1}{1+v^2}v'$$

dar

$$1-u^2 = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2},\quad u' = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$1+v^2 = \frac{2(1+x^2)}{(1+x)^2},\quad v' = -\frac{2}{(1+x)^2}$$

deci

$$y_1' = -\frac{2}{1+x^2},\quad y_2' = -\frac{1}{1+x^2}$$ [1]

rezultă că

$$y' = y_1' - 2y_2' = 0.$$

Altă soluţie. Să căutăm relaţia dintre u şi v pentruca

$$\arcsin u = 2\operatorname{arc\,tg} v\,;$$

notăm cu t valoarea lor comună:

$$u = \sin t\,,\quad v = \operatorname{tg}\frac{t}{2}\,;$$

dar

$$\sin t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}},\quad u = \frac{2v}{1+v^2}$$

aceasta este relaţia căutată. Dacă $v = \dfrac{1-x}{1+x}$ obţinem $u = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

---

1) De altfel $y_2 = \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg} x$.

VII. 952. Expresia

$$u = z^{\frac{\log_z x - \log_z y}{x-y}}$$

nu depinde de z. Caz particular $x = y$.

Soluție. Aplicăm logaritmii în baza z

$$\log u = \frac{\log x - \log y}{x-y} = \log \sqrt[x-y]{\frac{x}{y}}$$

deci

$$u = \sqrt[x-y]{\frac{x}{y}}$$

Dacă $x = y$, u devine nedeterminat; dar

$$\lim_{x=y} \frac{\log x - \log y}{x-y} = (\log x)' = \frac{\log e}{x} = \log \sqrt[x]{e}$$

adică

$$u = e^{\frac{1}{x}}$$

Dealtfel, pentru $u = 0$, $v = \infty$

$$\lim u^v = e^{\lim (u-1)v}$$

în cazul nostru

$$u = \frac{x}{y}, v = \frac{1}{x-y}$$

deci

$$(u-1)v = \frac{1}{y}$$

și regăsim rezultatul

$$\lim_{x=y} \sqrt[x-y]{\frac{x}{y}} = e^{\frac{1}{x}}$$

VII. 959. Într'un con ducem un plan paralel cu baza și proiectăm secțiunea pe planul bazei. Se formează astfel un cilindru înscris în con. Să se determine cilindrul înscris de volum maximum.

Soluție. Fie r și i raza bazei și înălțimea conului iar x distanța dela vârful conului la planul de secțiune. Înălțimea cilindrului este $i - x$ și raza bazei lui, $\frac{rx}{i}$. Volumul căutat este deci

$$V = \pi \frac{r^2}{i^2} x^2 (i - x);$$

derivata

$$V' = \pi \frac{r^2}{i^2} x (2i - 3x)$$

se anulează pentru $x = 0$ şi $x = \frac{2i}{3}$; V' este pozitiv între aceste zeruri şi negativ în afară deci prima valoare corespunde unui minim banal şi $x = \frac{2i}{3}$ corespunde maximului căutat.

De altfel se ştie că dacă $u + v = \text{const.}$ produsul $u^m v^n$ este maxim când u, v sunt proporţionale cu m şi n. Aplicând această propoziţie funcţiei V obţinem

$$\frac{x}{2} = i - x \quad \therefore \quad x = \frac{2i}{3}$$

şi regăsim rezultatul pe cale elementară.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 853. Fie* A, B, C *trei puncte pe o dreaptă;* A' *conjugatul armonic al lui* A *faţă de* B, C; B' *conjugatul lui* B *faţă de* C, A; C' *conjugatul lui* C *faţă ce* A, B. *Avem relaţia*

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = 0.$$

Soluţie. Avem relaţiile

$$\frac{2}{AA'} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}, \quad \frac{2}{BB'} = \frac{1}{BA} + \frac{1}{BC}, \quad \frac{2}{CC'} = \frac{1}{CA} + \frac{1}{CB}.$$

Adunăm aceste relaţii observând că

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{BA} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AB} = 0, \text{ etc.}$$

VIII. 856. Dreptele

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 + x_3 + x_4 \\ y & y_1 & y_2 + y_3 + y_4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

şi analoagele, deduse din permutarea indicilor sunt patru drepte concurente.

Soluţie. Notăm

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4\xi, \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4\eta \qquad (1)$$

şi adunăm în determinantul dat, la elementele coloanei a treia, elementele coloanei a doua, rămâne

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & \xi \\ y & y_1 & \eta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

sau $$(y_1 - \eta)x - (x_1 - \xi)y + x_1\eta - y_1\xi = 0;$$

scriem şi analoagele şi adunăm; ţinând seama de relaţiile (1) observăm că se reduc coeficienţii în x, y şi termenii liberi. De altfel ecuaţia (2) reprezintă o dreaptă care trece prin punctul (ξ, η), acelaşi pentru toate dreptele.

Altă soluţie. Considerăm un patrulater $A_1 A_2 A_3 A_4$ ale cărui vârfuri A_i au coordonatele (x_i, y_i). Presupunem aplicate în vârfuri, forţe paralele şi egale; rezultanta lor se aplică în centrul G al mediilor distanţe de coordonate (ξ, η) date de (1). Compunem forţele din A_2, A_3, A_4 a căror rezultantă se aplică în centrul de greutate G_1 al triunghiului $A_2 A_3 A_4$, de coordonate

$$G_1\left(\frac{x_2 + x_3 + x_4}{3}, \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}\right).$$

Rezultanta finală este situată pe $A_1 G_1$ a cărei ecuaţie este determinantul din enunţ. Dar dreptele $A_1 G_1$, $A_2 G_2$, $A_3 G_3$ şi $A_4 G_4$ se întâlnesc în G.

VIII. 867. Dreapta

$$\lambda(2 - \lambda)x - 2(1 - \lambda)y - (\lambda^2 - 2\lambda + 2)a = 0$$

este tangentă cercului

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Soluţie. Exprimăm condiţia ca dreapta $Ax + By + C = 0$ să fie tangentă cercului dat, scriind că distanţa dela centru la dreaptă este egală cu raza; sau

$$C^2 = a^2(A^2 + B^2).$$

In cazul problemei se verifică identitatea

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 = \lambda^2(2 - \lambda)^2 + 4(1 - \lambda)^2.$$

VIII. 876. Fie punctele $M_1(\alpha_1, \beta_1)$, $M_2(\alpha_2, \beta_2)$, $M_3, (\alpha_3, \beta_3)$ *şi inversele lor* $N_1\left(\frac{k\alpha_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2}, \frac{k\beta_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2}\right)$,... *Puterea originii faţă de cercul* $M_1M_2M_3$ *fie* p *şi faţă de cercul* $N_1N_2N_3$ *fie* q. *Avem relaţia* $pq = k^2$.

Soluţie. Puterea originii faţă de un cerc

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$$

este egală cu D:A. Să scriem ecuaţia cercului $M_1M_2M_3$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ \alpha_1^2+\beta_1^2 & \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Deci $D = |\alpha_1^2+\beta_1^2 \quad \alpha_1 \quad \beta_1|$ [1], $A = |\alpha_1 \quad \beta_1 \quad 1| = 2S$, S fiind aria triunghiului $M_1M_2M_3$. Deci $p = D:2S$.

Pentru cercul $N_1N_2N_3$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ k^2 & k\alpha_1 & k\beta_1 & \alpha_1^2+\beta_1^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

coeficientul lui x^2+y^2 este $k^2|\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_1^2+\beta_1^2| = k^2 D$ şi termenul liber $k^4|1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1| = 2k^4S$. Deci $q = 2k^2S:D$. Rezultă $pq = k^2$. Dacă $p = 0$, adică cercul $M_1M_2M_3$ trece prin origine, $q = \infty$ adică $N_1N_2N_3$ devine o dreaptă şi însuşirea simetrică, inversa dreptei $M_1M_2M_3$ ($p = \infty$) este un cerc ce trece prin origine.

Dacă originea este exterioară cercurilor, rezultatul se poate justifica geometric; în adevăr o tangentă comună dusă din O atinge cercurile P şi Q; avem $OP = \sqrt{p}$, $OQ = \sqrt{q}$; dar P şi Q sunt puncte inverse: $\overline{OP}\cdot\overline{OQ} = k$.

1) Am scris numai linia întâia a determinantului.

Până la 5 Oct., 1947 am primit soluții la exercițiile propuse în numerele 8—9 vol. XIII și 1 vol. XIV, dela*):

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa a VIII-a: STANCU D. D. (VIII: 892, 3, 6, 7, 8, 9, 900, 1, 2, 4, 5, E. G.: 791, 3, 4).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuș.

Clasa a VII-a: PANTEA N. A. (VII: 965, 6, 9, 91, 4, E. G.: 791, 2, 3, 4).

Școala Centrală de fete, București.

Clasa a V-a: PETCU A. LUCIA (V: 992).

Liceul „I. Heliade Rădulescu", București.

Clasa a VI-a; TÂRNĂUCEANU T. ANGELA (VI: 1009, 11*, 2*).

Institutul de fete „Sf. Maria", București.

Iasa a III-a: GHEORGHIU MIHAELA (III: 335*).

Colegiul Național „Sf. Sava", București.

Clasa a III-a: VELICU I. G. (III: 337).

Liceul „Matei Basarab", București.

Clasa a VIII-a; TEODORESCU P. P. (VIII: 895*, 906, 7, 8*, 9, 10, 1, 2*, 3*, E. G.: 795, 6, 7*, 8).

Liceul „Mihai Viteazul", București.

Clasa a IV-a: IONESCU-BUJOR C. CL. (IV: 817, 8*, 21*, 2, 3, 4, V: 998, VII: 982).

Clasa a VII-a: DODU A. E. (VII: 965, 6*, 7, 8, 9, 70, 1, 2, 3, 4, 5, VIII: 892, 3, 4, 5*, 6, 7, 8, E. G.: 792, 3).

Liceul „Gheorghe Șincai", București.

Clasa a IV-a: POPESCU V. D. (IV: 817, 9, V: 987*, 8, 9, 92, 4, 6, 7).

Liceul „Profesorii Asociați" București.

Clasa a VIII-a: SOCACIU C. ȘT. (VIII: 906*, 7*, 8).

Liceul „Cultura" Nr. 2, București.

Clasa a VII-a: GERTLER N. R. (VII: 969, 72, 4).

Liceul „B. P. Hașdeu", Buzău.

Clasa a VIII-a: STĂNILĂ D. G. (VIII: 892, 3, 4, 8, 9, 901, 2, 3, 4, 5).

---

*) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat și foarte îngrijit redactat.

Liceul „Em. Gojdiu", Oradea Mare.

Clasa a VII-a: BARBUL V. (VII: 961, 2, 3, 4, 5, 74).

Colegiul Militar „N. Filipescu", Predeal.

Clasa a V-a: SULICA A. A. (V: 970, 2*, 3, 4, 5*, 6*, 7*, 9, 80, 1, 2 VI: 1002, VII: 953, 9, VIII: 878, 9, 80, E. G.: 788).
Clasa a VI-a: OLTEANU N. GH. (VI: 1009, 10, 1, 2, 4*, 6, 7, VII: 965, 6, 7*, 8).

Liceul „Regele Ferdinand I", Râmnicu-Sărat.

Clasa a V-a: ȘERBĂNESCU G. G. (V: 979, 81, 2).

Liceul „Gh. Lazăr", Sibiu.

Clasa a V-a: LUPU V. C. (V: 978, 91*, 2*), SCHLOMIUK M. N. (V: 980, 9).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa a IV-a: FLONDOR I. I. (IV: 814, 5, 6, 7, 8, 9, 20).
Clasa a VI-a: ISAC N. P. (VI: 1009, 10, 6, VII: 965, 7).

Liceul „Traian" Turnu-Severin.

Clasa a IV-a: IONESCU T. (IV: 818, 9, V: 998).
Clasa a V-a: CĂRBUNARU I. (V: 987, 9, 91, 2, 4, 5, 6).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Februarie 1948

Clasa a III-a. *Exerc. 340.* Să se arate că

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$<\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{10}}.$$

C. I. Ț.

III. 341. Să se afle media geometrică între numerele 3^6, 4^6; de asemenea, între numerele 2^6 şi 6^6.

III. 342. Un trapez ABCD are bazele $AB = 2\,m$, $DC = 288\,m$ şi înălţimea de $145\,m$. Ducem diagonala BD. Să se arate că aria pătratului cu latura de $12\,m$ este a patra proporţională între ariile ABD, DBC şi ABCD.

Clasa a IV-a. *Exerc. 826.* Să se verifice relaţiile

$$(1+ab)(b-c)(c-a)-(a-b)^2(1+c^2)$$
$$=(1+bc)(c-a)(a-b)-(b-c)^2(1+a^2)$$
$$=(1+ca)(a-b)(b-c)-(c-a)^2(1+b^2).$$

C. I. Ţ.

IV. 827. Să se arate că

$$(1+ab)^2+(a-b)^2=(1+a^2)(1+b^2)=(1-ab)^2+(a+b)^2.$$
$$(1-ab)^2-(a-b)^2=(1-a^2)(1-b^2)=(1+ab)^2-(a-b)^2.$$
$$(1+a^2)(1+b^2)-(1+ab)^2$$
$$=(1-ab)^2-(1-a^2)(1-b^2)=(a-b)^2.$$

C. I. Ţ.

IV. 828. Să se efectueze produsul

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{10})(-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{10})(5-2\sqrt{6}).$$

E. V.

IV. 829. O maşină cu aburi, funcţionând câte 7 ore pe zi consumă în a zile 44,80 chintale cărbuni; iar altă maşină tot cu aburi, funcţionând câte 8 ore pe zi consumă în b zile 28,80 chintale cărbuni. Câţi cărbuni vor consuma aceste două maşini separat şi împreună, în timp de 15 zile, funcţionând fiecare câte m ore pe zi şi care este valoarea cărbunilor consumaţi în acest timp de fiecare maşină în parte, dacă valoarea lor totală este de S lei?

E. V.

IV. 830. Două plane P şi Q se taie după dreapta D. O dreaptă D_1 taie planele P şi Q în A_1, B_1 şi o dreaptă D_2 paralelă cu D_1 taie aceleaşi plane în A_2, B_2. Să se arate că dreptele A_1A_2 şi B_1B_2 se întâlnesc în acelaşi punct pe dreapta D.

Clasa a V-a. *Exerc. 1006.* Să se verifice că

$$\Sigma (a+b-c)(a-b+c)^2 = \Sigma a^3 - 5\Sigma a^2 b + 3\Sigma a^2 c + 6abc.$$

N. M.

V. 1007. Descompunând binomul $x^6 - y^6$ în factori, în două moduri diferite să se deducă identitatea

$$x^4 + x^2 y^2 + y^4 \equiv (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$$

E. V.

V. 1008. Să se arate că

$$\frac{(a-b)(b-c)}{(1-ab)(1-bc)} + \frac{(b-c)(1-ca)}{(c-a)(1-bc)} + \frac{(a-b)(1-ca)}{(1-ab)(c-a)} + 1 = 0.$$

C. I. Ţ.

V. 1009. Să se verifice egalitatea

$$\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-4} = 1 + \frac{x-5}{x^2-7x+12}$$

pentru $x = 3$ şi $x = 4$.

C. I. Ţ.

V. 1010. Să se verifice egalitatea

$$1 - (\sqrt{65}+8)(\sqrt{170}+\sqrt{442}-34) = (\sqrt{170}-13)(\sqrt{442}-21)$$

C. I. Ţ.

V. 1011. Să se arate că

$$1 + (\sqrt{a} \pm \sqrt{a-1})^2 = \frac{2}{1 \mp \sqrt{1-\frac{1}{a}}}$$

C. I. Ţ.

V. 1012. A, B, C, D fiind patru puncte pe o dreaptă în această ordine avem relaţia

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC} + \overline{AC} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{AD} = \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BD} + \overline{AB} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AD}$$

V. 1013. Un poligon convex de n laturi ($n > 4$) are cel mult trei unghiuri drepte; celelalte sunt obtuse. Dacă acestea din urmă sunt egale, fiecare are ca valoare $2 - \frac{1}{n-3}$ dintr'un unghiu drept

N. M.

Clasa a VI-a. *Exerc. 1026.* Să se verifice egalitatea numerică

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{10-\sqrt{10}}}{\sqrt{10+\sqrt{10}}} + \frac{10}{3} = \frac{(3+2\sqrt{2})(3+\sqrt{5})}{6}.$$

G. D. S.

VI. 1027. Să se găsească trei numere în progresie aritmetică astfel ca produsul primelor două numere să fie 4, iar produsul ultimelor două numere, 28.

E. M.

VI. 1028. Dacă a, b, c sunt trei numere în progresie geometrică avem

$$\frac{a^2+b^2+c-ab+ac-bc}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc} = \frac{a-b+c}{a+b+c}.$$

E. M.

VI. 1029. Să se rezolve ecuația

$$2^{\sqrt[x]{3}} = 3^{\sqrt[x]{2}}.$$

VI. 1030. Să se verifice identitățile

$$\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x = 1.$$

$$\sin^6 x + \sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x = 1.$$

N. M.

VI. 1031. Să se arate că

$$\frac{\dfrac{1 \pm \sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{1 \pm \sin x}}{\dfrac{1 \pm \cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{1 \pm \cos x}} = \operatorname{tg}^2 x.$$

C. I. T.

VI. 1032. Să se arate că

$$\sin^2 x(1-\operatorname{cotg}^2 x)+\cos^2 x(1-\operatorname{tg}^2 x)=0$$

$$\frac{1+\sin^2 x}{2+\operatorname{cotg}^2 x}+\frac{1+\cos^2 x}{2+\operatorname{tg}^2 x}=1.$$

C. I. Ţ.

VI. 1033. Două drepte D_1, D_2 taie două plane P şi Q în A_1, B_1 şi A_2, B_2. Paralela din A_1 la D_2 taie pe Q în C_1 şi paralela din A_2 la D_1 taie pe Q în C_2. Să se arate că dreptele B_1C_1 şi B_2C_2 sunt paralele iar dreptele B_1C_2 şi B_2C_1 se întâlnesc cu A_1A_2 pe dreapta de intersecţie a planelor P şi Q. Să se cerceteze cazul particular când planele P şi Q sunt paralele.

N. M.

Clasa a VII-a. *Exerc. 984.* Să se calculeze suma

$$S=C_2^2C_{n-2}^2+C_3^2C_{n-3}^2+C_4^2C_{n-4}^2+\ldots+C_{n-2}^2C_2^2.$$

E. V.

VII. 985. Să se calculeze suma produselor termenilor extremi şi egal depărtaţi respectiv de extremi ai unei progresii aritmetice.

E. V.

VII. 986. Să se arate că

$$\begin{aligned}&(x-y)^2[5(1+x^2)^2(1+y^2)^2-20(x-y)^2(1+x^2)(1+y^2)\\&+16(x-y)^4]^2+(1+xy)^2[5(1+x^2)^2(1+y^2)^2\\&-20(1+xy)^2(1+x^2)(1+y^2)+16(1+xy)^4]^2\\&=(1+x^2)^5(1+y^2)^5.\end{aligned}$$

C. I. Ţ.

VII. 987. Să se calculeze determinantul

$$D\equiv\begin{vmatrix} b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2\\ a & b & c\\ bc & ca & ab\end{vmatrix}.$$

V. C.

VII. 988. Dacă a, b, c sunt în progresie geometrică avem

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ c & a & b \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 2a^3 - 4b^3 + 2c^3.$$

E. M.

VII. 989. Să se arate că

$$\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & 1 \\ \sin b & \cos b & \cos(b-a) \\ \sin c & \cos c & \cos(a-c) \end{vmatrix} = 0.$$

I. I. S.

VII. 990. Să se discute sistemul

$$(a-1)x + ay = 4a+1 \quad , \quad ax + (a-1)y = 4a,$$
$$(a+2)x + (a-2)y = 4a+1.$$

I. I. S.

VII. 991. Să se rezolve şi să se discute sistemul

$$3x - 5y + 7z = 1, x + y + 2z = 3, x + \alpha y + z = \beta.$$

V. GH.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 914.* Fie O_1, O_2, O_3 trei puncte fixe; dacă M este arbitrar fie M_1 simetricul lui M faţă de O_1, M_2 simetricul lui M_1 faţă de O_2, M_3 simetricul lui M_2 faţă de O_3. Să se arate că mijlocul lui MM_3 este un punct fix O_4 şi că figura $O_1\ O_2\ O_3\ O_4$ este un paralelogram.

Să se arate că, mai general, un număr nepereche de simetrii poate fi înlocuit printr'o singură simetrie.

Pentru cinci centre date O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 al şaselea O_6 se construeşte observând că triunghiurile $O_1O_3O_5$ şi $O_2O_4O_6$ au acelaşi centru de greutate.

N. M.

VIII. 915. Să se găsească ecuaţia simetricei dreptei $Ax+By+C=0$ faţă de punctul $P(a, b)$.

G. D. S.

VIII. 916. Să se determine λ aşa fel ca dreptele de ecuaţii

$$(a-\lambda b)\,x+(b-\lambda c)\,y+c-\lambda a=0$$

$$a\,(b-c)\,x+b\,(c-a)\,y+c\,(a-b)=0$$

$$(b-c)\,(b+c-a)\,x+b\,(c+a-b)\,y-c\,(a+b-c)=0$$

să fie concurente. Să se afle coordonatele punctului comun.

I. I. S.

VIII. 917. Fie ABC un triunghiu oarecare, A' mijlocu laturii BC şi DE o paralelă la BC. Se înseamnă cu M mijlocul lui DE. Punctele A, M, A' sunt colineare. (Soluţie analitică).

V. C.

VIII. 918. Fie ABC un triunghiu oarecare şi DE o paralelă la BC. Fie M un punct pe BC şi M' un punct pe DE astfel ca

$$\frac{BM}{MC}=k\ ,\quad \frac{DM'}{M'E}=k.$$

Punctele A, M', M sunt colineare (Soluţie analitică).

V. C.

VIII. 919. Să se scrie ecuaţia simetricei dreptei $3x+2y-8=0$, faţă de dreapta $6x-2y+11=0$. G. D. S.

VIII. 920. Fie polinoamele

$$P_1(x)=4x^6+mx^4+nx^2-9$$

$$P_2(x)=4x^6+px^4+qx^2-18.$$

Să se determine m, n, p, q ştiind că P_1-P_2 şi P_1+P_2 sunt patratul şi cubul aceluiaşi polinom. E. M.

VIII. 921. Să se arate că polinomul

$$(x^2+ax+a)^2-(a-1)^2x$$

se împarte exact prin x^2+x+1. Să se afle câtul fără a se face împărţirea. I. I. S.

Exerciţii Generale. *Exerc. 799.* Să se arate că numerele de 4 şi de 5 cifre de forma $m00n$ şi $m000n$ sunt prime cu 101.

GH. B.

E. G. 800. Să se determine numărul $N=abba$ astfel încât $\frac{N}{11}$ să fie un patrat perfect.

V. GH.

E. G. 801. Un poligon regulat de m laturi are fiecare unghiu egal cu α. Un poligon convex de $n > m$ laturi poate avea cel mult $m-1$ unghiuri egale cu α; celelalte sunt mai mari; dacă sunt egale între ele, fiecare are ca valoare $2 - \frac{4}{m(n-m+1)}$ dintr'un unghiu drept. Caz particular, $m = 3, 4$.

N. M.

E. G. 802. Intr'un cerc de rază R se înscrie un trapez având ca baze latura triunghiului echilateral şi aceea a exagonului regulat înscrise în acelaşi cerc. Să se afle mărimea laturilor neparalele ale acestui trapez, înălţimea şi suprafaţa lui. Să se afle de asemenea suprafaţa şi volumul solidului născut prin rotirea acestui trapez în jurul bazei sale mari.

Aplicaţii pentru $R = 2$ şi $R = \sqrt{3} - 1$.

E. V.

ERATĂ. La E. G. 795 (pag. 21) să se treacă iniţialele Gh. B. ale propunătorului.

INSTRUCŢIUNI

a) Soluţiile exerciţiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală, ca foaia de caiet obişnuit şi paralel cu lăţimea.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluţionarea unui exerciţiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile ce vor fi necesare pentru urmărirea exerciţiului se vor construi îngrijit.

Nu se va trimite soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie.

b) Redactarea soluţiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numele rezolvitorului în ordinea următoare: Numele de botez, iniţiala părintelui, numele de familie, urmat de clasa şi şcoala pe care o urmează.

Dedesupt se va scrie enunţul astfel cum este publicat în revistă cu numărul exerciţiului apoi soluţia clar compusă şi îngrijit scrisă, iar la sfârşit iscălitura rezolvitorului.

c) Nu se vor lua în considerare soluţiile iscălite de doi sau mai mulţi corespondenţi sau copiate unele după altele, nici soluţiile exerciţiilor propuse la clase inferioare aceleia în care se află corespondentul.

d) Soluţiile se primesc timp de trei luni dela propunerea exerciţiului, numai dela abonaţii „Suplimentului cu Exerciţii" al Gazetei Matematice, pe adresa Casa Gazeta Matematică, Ing. C. Ionescu-Ţiu, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2. Pe plic sau pachet se va menţiona numele, localitatea, şcoala şi clasa rezolvitorului.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând şi probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societăţii „Gazeta Matematică" au apărut şi se găsesc următoarele:

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 150

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 180

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de analitică.* Ediţia II. Partea II adăogită de **N. G. Botea** şi **G. Ionescu-Bujor** . . . . . Lei 250

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a Istoric), învăţăminte. Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 100

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanică raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.500

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 320

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . Lei 400

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul Anghel Saligny)

I. **Ion Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . Lei 100

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . Lei 250

Pentru biblioteci şi autorităţi toate preţurile se triplează.

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din „Gazeta Matematică" de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15 % din preţ pentru taxele de expediţie.

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru vol. LIII abonamentele sunt:

Pentru profesori, studenţi şi elevi . . . . . Lei 480

Pentru autorităţi şi biblioteci . . . . . Lei 1.500

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ — C. 42.780

8771

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XIV. No. 3 1 DECEMBRIE 1947

9692

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI. 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 7-3803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL XIV. No. 3 — 1 DECEMBRIE 1947

ABONAMENTUL LEI 180 PE AN (9 numere)

Pentru instituţii şi biblioteci lei 400

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa: ING. C. IONESCU-ŢIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

REGULI DE DIVIZIBILITATE

1. Dintru început voi reaminti câteva teoreme generale care vor fi necesare pentru desvoltările ce vor urma.

Teorema I. *Dacă mai multe numere sunt divizibile prin acelaşi divizor, atunci şi suma lor este divizibilă prin acelaşi divizor.*

In adevăr fie numerele întregi $A_1, A_2, \ldots, A_p$ divizibile prin divizorul k; deci avem

$$A_1 = k\alpha_1, \; A_2 = k\alpha_2, \; \ldots\ldots, \; A_p = k\alpha_p$$

şi prin adunare deducem

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_p = k(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_p)$$

ceeace probează teorema.

Teorema II. *Dacă o sumă este compusă din două părţi dintre care una este divizibilă prin divizorul* d, *iar a doua parte divizată prin* d *dă restul* r; *restul diviziunii sumei prin* d *este tot* r.

In adevăr fie $S = A + B$. Avem

$$A = d\alpha \;\; , \;\; B = d\beta + r \;\; \therefore \;\; S = d(\alpha + \beta) + r,$$

ceea ce probează teorema enunţată.

Teorema III. *Dacă un număr oarecare este suma a două părţi, dintre care una este divizibilă printr'un divizor dat, pentru ca numărul să fie şi el divizibil prin acel divizor este necesar şi suficient ca şi a doua parte să se dividă cu acel divizor.*

Condiţia e *necesară*, căci dacă partea a doua dă un rest, atunci întreg numărul divizat prin divizorul dat dă acelaşi rest (vezi teorema II). Condiţia este şi *suficientă*, căci dacă ambele părţi sunt divizibile cu divizorul dat, atunci şi suma lor, adică numărul considerat, este divizibilă prin acelaşi divizor (vezi teorema I).

Teorema IV. *Dacă două numere sunt divizibile printr'un divizor dat, diferența lor este divizibilă prin acelaș divizor.*

In adevăr fie A și B două numere divizibile prin divizorul *d*. Atunci avem.

$$A = d\alpha, \quad B = d\beta \quad \therefore \quad A - B = d(\alpha - \beta),$$

ceeace adevereşte propoziția enunțată.

Consecințe. a) Orice divizor care divide o sumă și pe una din cele două părți ale ei, divide și pe cealaltă. In adevăr fie $S = P + Q$ iar $S = Md, P = Md$; rezultă că și $Q = Md$, căci

$$Q = S - P \text{ (vezi teorema IV).}$$

b) Dacă două numere sunt divizibile prin acelaşi divizor și restul împărțirii lor este divizibil prin acelaș divizor. In adevăr fie A, B cele două numere.

$$A = B.C + R \quad \therefore \quad R = A - B.C$$

Insă B este divizibil prin divizorul *d*; orice multiplu de al lui B, deci B. C, va fi divizibil prin *d*. Rezultă că R este divizibil prin *d* (vezi teorema IV.

c) Dacă două numere împărțite cu numărul *d* dau resturi egale, diferența celor două numere este divizibilă cu *d*.

In adevăr fie M și N cele două numere. Avem:

$$M = dp + r, \quad N = dq + r \quad \therefore \quad M - N = d(p - q),$$

ceeace demonstrează afirmația făcută.

2. Utilizând teorema III se stabilesc reguli simple de divizibilitate pentru divizorii 2 și 5, 4 și 25, 8 și 125, 16 și 625. Problema pe care ne-o punem acum este găsirea unor metode generale pentru stabilirea regulilor de divizibilitate pentru diverși divizori.

Numim *caracter de divizibilitate* sau *regulă de divizibilitate* condiția necesară și suficientă pentru ca un număr să fie divizibil prin divizorul dat.

Din punct de vedere practic nu este util a considera decât acele reguli de divizibilitate a căror întrebuințare este mai simplă decât operația de împărțire însăși. Totuși acest studiu prezintă un important interes teoretic, deaceea îl vom face mai departe.

(Va urma) V. CLAUDIAN.

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa a III-a. *Exerc. 334. Într'un triunghiu dreptunghic cu unghiul drept* A, *perpendiculara în* C *pe* BC *întâlneşte pe* AB *în* C_1; *iar bisectoarea unghiului* C *taie latura* AB *în* C_2.

Să se arate că bisectoarele unghiurilor B *şi* C *se taie formând un unghiu de 45° şi că segmentele* $\overline{C_1C}$ *şi* $\overline{C_1C_2}$ *sunt egale.*

C. I. Ţ.

Unghiul ascuţit format de bisectoarele interioare ale unghiurilor B şi C fiind exterior triunghiului format de BC şi bisectoarele duse are ca valoare

$$\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}=\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=\frac{90^0}{2}=45^0.$$

In triunghiul CC_1C_2 unghiul C_2CC_1 este $90^0-\frac{\hat{C}}{2}$; iar unghiul CC_2C_1 considerat în triunghiul dreptunghic ACC_2 are deasemenea valoarea $90^0-\frac{\hat{C}}{2}$, deci triunghiul CC_1C_2 fiind isoscel avem $\overline{C_1C}=\overline{C_1C_2}$.

III. 335. Într'un triunghiu isoscel ABC, *unghiul* A *dela vârf fiind ascuţit,* $(\overline{AB}=\overline{AC})$, *ducem înălţimea* BB_1 *şi bisectoarea* AA_1. *Să se arate că:*

$$2\,\overline{B_1C}\times\overline{AA_1}=\overline{BC}\times\overline{BB_1}$$

C. I. Ţ.

Triunghiurile AA_1B şi BB_1C fiind dreptunghice şi având câte un unghiu ascuţit egal, $\hat{B}=\hat{C}$, scriem proporţionalitatea laturilor şi avem:

$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}}=\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}}$, înlocuim segmentul $\overline{A_1B}$ cu $\frac{\overline{BC}}{2}$ şi egalăm produsul mezilor cu al extremilor.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 879. Fie* x_1, x_2, x_3 *rădăcinile ecuației*

$$x^3 + x - 2 = 0.$$

Să se arate că $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + 10 = 0.$

Soluție. Relațiile dintre rădăcini și coeficienți

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad , \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 1$$

permit să scriem

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) = -2$$

Substituim în ecuație, pe rând, rădăcinile x_1, x_2, x_3 și adunăm:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$$

deci

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 6.$$

Înmulțim partea întâia a ecuației cu x^2

$$x^5 + x^3 - 2x^2 = 0;$$

înlocuim din nou pe x prin x_1, x_2, x_3 și adunăm:

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -10.$$

De altfel ecuația dată se poate ușor rezolva. Obținem

$$x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0$$

deci

$$x_1 = 1, \; x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

și verificăm prin calcul direct, relația.

Generalizarea Exerc. 756. Exerciții Generale. (Suplimentul cu Exerciții G. M., Anul XIV, Nr. 1).

a, M, N *fiind numere întregi pozitive, să se determine cel mai mare divizor comun al numerelor*

$$a^M - 1 \quad \text{și} \quad a^N - 1.$$

Să presupunem $M > N$, p și R fiind câtul și restul împărțirii lui M prin N. Observăm dela început, că cel mai mare divizor comun al numerelor $a^M - 1$ și $a^N - 1$ *este prim cu* a, căci în caz contrar el divizând pe $a^M - 1$ și pe a^M, ar urma să dividă și pe *1*.

Cel mai mare divizor comun căutat divizând pe cele două numere $a^M - 1$ și $a^N - 1$, divide neapărat diferența acestor două numere, adică pe $a^N(a^{M-N} - 1)$ și cum el este prim cu a^N, trebue să dividă pe $a^{M-N} - 1$. Așa dar, *cel mai mare comun divizor al numerelor* $a^M - 1$ *și* $a^N - 1$ *este același cu al numerelor* $a^{M-N} - 1$ *și* $a^N - 1$.

Dacă $p > 1$, repetând raţionamentul de mai sus de p ori succesiv, deducem că *cel mai mare divizor comun al numerelor* $a^M - 1$ *şi* $a^N - 1$ *este acelaşi cu al numerelor* $a^N - 1$ *şi* $a^R - 1$.

Insemnând din nou cu p_1 şi R_1 câtul şi restul împărţirii lui N prin R şi aplicând rezultatul de mai sus, deducem că *cel mai* mare divizor comun al numerelor $a^M - 1$ şi $a^N - 1$ este acelaşi ca al numerelor $a^R - 1$ şi $a^{R_1} - 1$. Şi aşa mai departe.

Dacă restul împărţirii lui R_{k-1} prin R_k este zero, atunci cel mai mare divizor comun al numerelor $a^{R_{k-1}} - 1$ şi $a^{R_k} - 1$ fiind acelaşi cu al numerelor $a^{2R_k} - 1$ şi $a^{R_k} - 1$, el este $a^{R_k} - 1$; rezultă atunci că *cel mai mare divizor comun al numerelor* $a^M - 1$ şi $a^N - 1$ este $a^{R_k} - 1$, R_k, după modul lui de obţinere, *fiind cel mai mare divizor comun al numerelor* M *şi* N.

Consecinţă. 1. Dacă M şi N sunt două numere prime între ele, cel mai mare divizor comun al numerelor $a^M - 1$ şi $a^N - 1$ este $(a-1)$.

2. In cazul numerelor $2^{22068} - 1$ şi $2^{1941} - 1$, având

	11	2	1	2	2	2	2	2	2
22068	1941	717	507	210	87	36	15	6	3
717	507	210	87	36	15	6	3	—	

cel mai mare divizor comun al lor este $2^3 - 1 = 7$.

O. N. Ţ.

Până la 5 Noembrie 1947, am primit soluţii la exerciţiile propuse în numerele 8—9 vol. XIII, 1 şi 2 vol. XIV, dela*):

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuş.

Clasa a VII-a: Diaconescu C. C. (VII: 978, 81*, 2*, 8); Roibu I. T. (VII: 977, 8, 81, 2).

Clasa a VIII-a: Gross A. T. (VIII: 906, 7, 8*, 10, E. G.: 796).

Liceul de fete „Regina Maria", Bucureşti.

Clasa a V-a: Ploscaru N. Livia (V: 999, 1000).

Şcoala Centrală de fete, Bucureşti.

Clasa a V-a: Bălăşoiu G. Lili (V: 987, 8, 9, 90, 1, 4, 5, 6, 7).

Clasa a VI-a: Dima C. Diana (VI: 1019).

Clasa a VII-a: Bonciu Margareta (VII: 976*, 7, 8, 81, 2).

---

*) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu foarte bine rezolvat şi foarte îngrijit redactat.

Liceul „Domniţa Ileana", Bucureşti.

Clasa a V-a: MAHMUTENCU GABRIELA (V: 987, 90).

Liceul de fete „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa a IV-a: GEORGESCU M. MARIA (IV: 824).
Clasa a V-a: DIACONU RODICA (V: 988, 92, VI: 1018, 19, VII: 982).
Clasa a VII-a: MARCU I. ALEXANDRINA (VII: 978, 81, 2).

Institutul „Moteanu" Bucureşti

Clasa a VII-a: FOTESCU C. LUCICA (VII: 978, 80, 1, 2, VIII: 906, 7).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa a VI-a: STĂNESCU D. C. (VI: 1009, 10, 1*, 4*, 5*, E. G.: 792, 4).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa a III-a: FRĂSIN C. R. (III: 337, 8, 40, 1, 2); MĂCHIŢĂ P. G. (III: 337, 8, 40, 1, 2).
Clasa a V-a: DRĂGULESCU T. (V: 998*); TOTOIU I. (V: 999, 1001, 2, 4, 6).
Clasa a VII-a: CAMIL E. S. (VII: 977, 8, 80, 1, 2*, 3, VIII: 906, 7, 8*); DAVIDOVICI I. A. (VII: 987, 8, 9, VIII: 906, 7); FRIEDMAN D. I. (VII: 978, 80, 1, 2, 3, 9, VIII: 906, 7, 8*); IONESCU I. B. (VII: 978, 82, VIII: 906, 7, 8); IORDĂNESCU T. ŞT. (VII: 978, 82, 9*, VIII: 906, 7); LENZ FR. (VII: 977, 8, 80, 1, 2, 7, 9, 91, VIII: 906, 7, 8*); MARINEANU I. N. (VII: 976*, 7, 8, 82, 9*, VIII: 906, 8*); PĂUNESCU S. G. (VII: 976*, 7, 8, 9*, 80. 1, 2*, 3, 7*, 8*, 9*, VIII: 906, 7, 8*).
Clasa a VIII-a: TEODORESCU P. P. (VIII: 914*, 5*, 6, 7, 8, 9*, 20, 1*, E. G.: 799*, 800*, 1*, 2).

Liceul „Mihai Viteazul", Bucureşti.

Clasa a IV-a: IONESCU BUJOR C. CL. (IV: 826*, 7*, 8*, 9*, V: 1001, 2, 4*, 6, 7, 8, 12, VI: 1023*).
Clasa a V-a: CONSTANTINESCU I. V. (V: 985, 9, 90, 1, 2, 4).

Liceul „Spiru Haret", Bucureşti.

Clasa a V-a: DINU V. (V: 989).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Cllasa a VI-a: DELEANU A. (VI: 1019, 23*).

Liceul „Marele Voevod Mihai", Bucureşti.

Clasa a VII-a: CORCIOVEI I. A. (VII: 976*, 7, 8, 9*, 81, 2, 3, VIII: 906, 7, 8, 10, 2*, E. G. 795*, 6, 7*); LUCA M. C. (VII: 978, 81, E. G.: 792).
Clasa a VIII-a: GRIGORESCU N. P. (VIII: 906, 7).

Liceul „Gheorghe Şincai", Bucureşti.

Clasa a VII-a: IONESCU G. D. (VII: 977, 8, 9*, 81, 2*, E. G.: 792).

Liceul „Mihail Eminescu", Bucureşti

Clasa a VII-a: ANGHEL D. V. (VII: 977, 8, 81, 2, VIII: 906, 7, 8).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa a VII: OLARU G. V. (VII: 965, 9, 74, 5, E. G.: 784).

Liceul „Profesorii Asociaţi" Bucureşti.

Clasa a IV-a: GUGUI C. D. (IV: 821*, 2*, 3*, 4).
Clasa a VIII-a: SOCACIU ŞT. (VIII: 910, 5*, 7, 8).

Liceul „I. L. Caragiale", Bucureşti.

Clasa a V-a: GOLDSTEIN B. (V: 998*, 1003).

Particulari-Bucureşti.

Clasa a VIII-a: HARET S. R. (VIII: 902, 3).

Liceul „B. P. Haşdeu", Buzău.

Clasa a VI-a: COMĂNESCU S. V. (VI: 1018, 9, 20, 7, 8, 30, 1, 2, VII: 977, 8, 82, 8, 9, 90, VIII: 908, E. G.: 802).

Liceul „Ştirbey Vodă", Călăraşi.

Clasa a VI-a: IONESCU N. I. (VI: 1009, 10).

Liceul „Dragoş-Vodă", Câmpulung-Bucovina

Clasa a VIII-a: GRIGOROVICI G. I. (VIII: 906*, 7*, 8, 9, 10*).

Liceul Armatei „D. A. Sturdza", Craiova.

Clasa a III-a: NADĂ L. (IV: 813*), POPA GH. N. (III: 330, 2*, 4, 5, 6, E. G.: 781); SEMENESCU N. GH. (III: 334, 5, E. G. 781).

Clasa a IV-a: AIONIŢOAIE V. (IV: 815, 6); ANDREI A. ŞT. (IV: 809, 12, 3, 4*); ATHANASIU V. I. (IV: 809, 13, 4*, 6); BĂLĂNESCU G. D. (IV: 809, 12, 3); CHEROIU C. D. (IV: 814); CIOROIANU N. L. (IV: 812, 3, 4); CHIPER P. GH. (IV: 809, 10, 3, 4, 5, 6); COMĂNESCU G. N. (IV: 809, 12, 3, 5, 6); CONSTANTINESCU L. (IV: 809, 12, 3, 4); DRĂGHICI I. A. (IV: 812, 3, 4); DRĂGUŞIN I. N. (IV: 809, 12, 14); DUMITRESCU C. M. (IV: 808, 9, 13, 4, 5, 6); FLORESCU V. E. (IV: 809, 12, 3, 4); GHERONEA M. C. (IV: 808, 9, 10, 2, 3, 4, 5, 6); GIOARĂ ST. M. (IV: 808, 9, 10, 2, 3, 4, 5, 6); GHINDĂ C. (IV: 809, 10, 2, 3, 4, 5, 6); IONESCU R. E. (IV: 808, 9, 10, 3, 4, 5, 6); MEGAN E. (IV: 808, 9, 10, 2, 3, 5, 6); NICOARĂ P. V. (IV: 808, 9, 10, 2, 3, 4, 5, 6); NICOLĂESCU ŞT. (IV: 809, 10, 2, 3, 4, 5, 6); PIŢUREA N. I. (IV: 808, 9, 10, 2, 3, 4, 5, 6); SECU R. A. (IV: 809, 12, 3, 4, 5, 6).

Clasa a V-a: VĂRZARU I. E. (V: 986, 90*, 4; VI: 1009, 10*; VII: 965, 6, 7).

Clasa a VI-a: MIHĂLCIOIU M. (VI: 1004, 6*, 7, 8, VII: 961, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9; VIII: 887, 903, 4).

Clasa a VIII-a: EFTODE M. A. (VIII: 892, 5, 6*, 7, 8, 9, 904*, E. G.: 783, 4).

Liceul „Radu Negru", Făgăraş.

Clasa a VIII-a: DUMITRESCU I. C. (VIII: 965, 6, 7, 8, 9, 74).

Liceul Internat „C. Negruzzi", Iaşi.

Clasa a VIII-a: PAPUC I. D. (VIII: 906*, 7*, 8*, 9*, 10).

Liceul „Em. Gojdiu", Oradea Mare.

Clasa a V-a: LEUCA V. T. (V: 998, 1004, VI: 1020, E, G.: 798).

Clasa a VI-a: POPA P. (VI: 1007, 9, 11*, E. G.: 791, 1, 2, 3, 4), PRECUP T. (VI: 982, 3); ŞUTA M. (VI: 1018, 9, 20, 1, 6, 7, 8*, 30* VII: 977, 8, 80, 2, 3, E, G.: 795, 6, 8, 800); TRIFA F. (VI: 1009, 11, E. G.: 781, 4).

Clasa a VII-a: ADAM J. (VII: 976, 7, 8, 80, 1, 2, 3); BARBUL V. (VII: 961, 2, 3, 4, 5*, 74); ROSENBERG N. A. (VII: 976, 80, 2, VIII: 906, 7).

Liceul „I. C. Brătianu", Piteşti.

Clasa a VII-a: STĂNCIULESCU F. (VII: 969, 71, 4).

Colegiul Militar „N. Filipescu", Predeal.

Clasa a V-a: GHEORGHIU V. (V: 989, 91, 2, 4, 5, VI: 1009, VII: 965); LUPAȘCU F. (V: 989, 94, 5, 6, VII: 965); SULICĂ ALEX. (V: 970, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 80, 1, 2, VI: 1002, VII: 953, 9, VIII: 878, 9, 80, E. G.: 788).

Clasa a VI-a: FĂCĂOARU I. (VI: 1009, 10*, 9, 20*, 2, 3, VII: 965, 77, 9, VIII: 911, E. G.: 791, 4); OLTEANU GH. (VI: 1009, 11, 2, 4, 6, 7, VII: 965, 6, 7, 8).

Clasa a VII-a: BADEA L. (VII: 977); DUȚOIU A. (VII: 977, 8, 80, 3); FLOREA A. (VII: 976, 7, 80, 2, 3); GEORGIAN N. (VII: 976, 7, 8, 80, 2, 3*); IONESCU C. (VII: 976, 7, 8, 9*, 80, 2, 3); MARINESCU A. (VII: 976, 7, 8, 83); MIRCEA D. (VII: 976, 7, 8, 9, 80, 2, 3); ZGĂVARDICI C. (VII: 978, 82).

Liceul „Regele Ferdinand I", Râmnicu-Sărat.

Clasa a III-a: POPESCU D. O. (III: 337, 9, 40, 1).

Clasa a V-a: ȘERBĂNESCU GH. (V: 979, 81*, 2).

Clasa a VI-a: CURSARU S. (VI: 1018, 9).

Clasa a VII-a: BRUCKMAYER GH. (VII: 965, 6, 7, 8, 9*, 71, 2, 3, 4, 5); VELEA M. E. (VII: 978, 81*, 2).

Liceul „Gh. Lazăr", Sibiu.

Clasa a V-a: LUPU C. (V: 978, 91, 2).

Clasa a VI-a: SCHLOMNIUK N.: (VI: 1024, VII: 982).

Clasa a VII-a: MOSORA N. (VII: 965, 74).

Liceul de fete „Domnița Ileana", Sibiu.

Clasa a IV-a: HERȚIA RODICA (IV: 823).

Liceul „Radu Greceanu", Slatina-Olt.

Clasa a III-a: NICOLESCU M. (III: 334).

Clasa a VI-a: CONSTANTINESCU GH. (VI: 1019, 26, 7, 30*, 1, 2, VII: 978, E. G.: 796).

Clasa a VII-a: ANDRONESCU L. (VII: 878, 80, 2, 3, 92, 5, 6, 7, VIII: 904, 6, 7, 8, E. G.: 783, 95, 6).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa a IV-a: FLONDOR I. (IV: 814, 5, 6, 7, 8, 9, 20*); OPROIU A. (IV: 817, 8, 9, 20*, VI: 1009).

Clasa a V-a: CĂRBUNARU I. (V: 987, 9, 92*, 4).

Clasa a VI-a: ISAC P. (VI: 1009, 16, VII: 967).

Clasa a VII-a: COANDA I. (VII: 965, 7, E. G.: 781); COSOROABA V. (VII: 976, 8, 81, 2, 3); CURELARU V. (VII: 978*, 81, 2); DĂNESCU GH. (VII: 977, 8, 81, 3); DONCIU I. (VII: 978, 81, 2, 3); HUREZEANU R. (VII: 965, 7, 1009, 16*); NEGUȚ I. (VII: 976, 7, 8*, 81, 2*, 3, E. G.: 795); TĂMĂȘESCU (VII: 965, 77, 8, 81, 2*, 3*); POENARU C. (VII: 976, 7, 82, 3*); SPAHIU D. I. (VII: 976*, 7, 8, 9, 80, 1, 2, 3*).

Liceul „Ecaterina Teodoroiu", Târgu-Jiu.

Clasa a VI-a: PÂRVĂNESCU EUGENIA (VI: 1018, 9*, 20, 7, VII: 976, 7, 8, 82*).

Liceul de fete „Carmen Sylva", Timișoara.

Clasa a V-a: GÂRLEȘTEANU ELIZA (V: 989, 94, 5, 8*, 1001, 2, 3, 4*, 9*, 20, VII: 982, 3, E. G.: 795).

Liceul „C. D. Loga", Timișoara.

Clasa a VIII-a: DOBRIAN C. (VIII: 906*, 7*, 10).

Liceul „Traian" Turnu-Severin.

Clasa a V-a: IONESCU T. (V: 982, 98, 1002, 3, 7, VII: 983).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Martie 1948*)

Clasa a III-a. *Exerc. 343.* Cu numerele

$$\sqrt{12}\ ,\ \sqrt{20}\ ,\ \sqrt{21}\ ,\ \sqrt{35}$$

se poate forma o proporţie.

III. 344. Presiunile se exercită proporţional cu suprafaţa. Un gaz apasă cu 6 atmosfere pe un capac circular cu raza de 2,76 cm; cât de mare este raza fundului, dacă apăsarea corespunzătoare este de 13,5 atmosfere?

III. 345. O echipă de 15 oameni, lucrând câte 8 ore pe zi, se angajează să termine o lucrare anumită în timp de 26 zile. După două zile echipa descompletându-se prin îmbolnăvirea a trei lucrători, se întreabă:

a) In cât timp se va termina lucrarea, dacă restul oamenilor continuă să lucreze acelaşi număr de ore pe zi?

b) Câte ore ar trebui să lucreze pe zi restul oamenilor, pentru ca lucrarea să se termine în acelaşi timp?

E. V.

Clasa a IV-a. *Exerc. 831.* Să se verifice că

$$(a^2 + 2ay + 2y^2)^2 = 4y^2(a + y)^2 + a^2(a + 2y)^2.$$

N. M.

IV. 832. Să se arate că

$$(a - b)(1 + c^2) + (b - c)(1 + ab)(1 + ca) + c(1 + a^2)(1 + bc) = a(1 + b^2)(1 + ac).$$

C. I. Ţ.

IV. 833. Să se arate că

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{(1+ab)(a+b)}{(1+a^2)(1+b^2)},$$

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} = \frac{(1-ab)(a+b)}{(1-a^2)(1-b^2)}.$$

C. I. Ţ.

*) Exerciţiile se vor redacta după instrucţiunile publicate în numerele 1 şi 2 ale Suplimentului cu Exerciţii.

IV. 834. Să se arate că

$$\frac{\dfrac{2a-b}{3a+b}+\dfrac{a+2b}{a-3b}}{\dfrac{2a-b}{a-3b}-\dfrac{a+2b}{3a+b}}=1.$$

E. M.

IV. 835. Să se demonstreze că proiecția unui segment $\overline{AB}$ din spațiu, pe o dreaptă D, dintr'un plan P se obține proiectând pe dreapta D, proiecția $\overline{A'B'}$ a lui $\overline{AB}$ pe planul P.

V. Gh.

Clasa a V-a. *Exerc. 1014.* Să se verifice că

$$x(x^2-10x+5)^2+(5x^2-10x+1)^2=(1+x)^5.$$

N. M.

V. 1015. Să se verifice relațiile

$$(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2}+x^{2n}+\ldots+x^{4n-2})(1-x^2)=1-x^{4n}.$$

$$(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2}-x^{2n}-\ldots-x^{4n-2})(1-x^2)=(1-x^{2n})^2.$$

C. I. Ț.

V. 1016. Să se calculeze

$$(b-c)\,\frac{1-\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{b-c}}{1-\dfrac{b}{b-c}-\dfrac{c}{b+c}}+(c-a)\,\frac{1-\dfrac{c}{c+a}+\dfrac{a}{c-a}}{1-\dfrac{c}{c-a}-\dfrac{a}{c+a}}+(a-b)\,\frac{1-\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}}{1-\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}}.$$

C. I. B.

V. 1017. Să se arate că expresiunile

$$E_1=\frac{x-y}{x+y}+1,\quad E_2=\frac{x+y}{x-y}-1,\quad E_3=2\frac{\sqrt{(x^2+y^2)^2-2xy(x^2-y^2)}}{x^2-y^2}$$

pot fi laturi într'un triunghiu dreptunghic.

Verificare pentru $x=2$, $y=1$.

H. D.

V. 1018. Să se arate că

$$\frac{1 \pm \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{1 \pm \sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{1-x}}.$$

C. I. Ţ.

V. 1019. Pentru ce valoare a lui a, ecuaţiile

$$\frac{x}{a+1} + \frac{x-1}{a} = 2 \quad , \quad \frac{x+1}{a} + \frac{x-2}{a-1} = 3$$

sunt echivalente ?

E. M.

V. 1020. A, B, C, D fiind patru puncte pe o dreaptă, iar M şi N mijloacele segmentelor AB şi CD avem relaţia

$$\overline{AC} + \overline{AD} - \overline{AB} = 2 \cdot \overline{MN}.$$

V. 1021. Considerăm triunghiul ABC; ducem un arc de cerc de centru B, trecând prin A care taie pe BC în B', B''. AB', AB'' sunt paralele cu bisectoarele unghiului B.

Clasa a VI-a. *Exerc. 1034.* Să se verifice identitatea

$$(a+b+c)(a-b-c)(-a+b-c)(-a-b+c)$$
$$= (a^4 + b^4 + c^4) - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

şi să se raţionalizeze apoi, ca aplicaţie a identităţii de mai sus, numitorul fracţiei

$$\frac{N}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

E. V.

VI. 1035. Să se găsească trei numere în progresie geometrică, astfel ca suma extremilor să fie 15, iar diferenţa dintre al doilea şi primul număr, 3.

E. M.

VI. 1036. Să se arate că pentru $-1 < x < 1$. avem

$$\frac{1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{m-1}} = 1 - x^n(1 - x^{m-n})(1 + x^m + x^{2m} + \ldots).$$

C. I. Ţ.

VI. 1037. Să se calculeze expresia

$$E = \left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)^{10} - 100.$$

VI. 1038. Să se arate că

$$\sin^2 x \sin^2 y = (\cos x \cos y - 1)^2 - (\cos x - \cos y)^2.$$

C. I. Ţ.

VI. 1039. Să se arate că

$$\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x} = \sqrt{2(1+\cos x)}$$

$$\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2(1+\sin x)}.$$

C. I. Ţ.

VI. 1040. Să se afle dimensiunile unui dreptunghiu a cărui arie este egală cu S şi ale cărui diagonale fac un unghiu u. Aplicaţie $S = 6\ m^2$, $u = 67°20'$.

VI. 1041. Considerăm un punct M şi proiecţia O a lui, pe un plan P. Fie încă I şi J două puncte în planul P. Locul geometric al punctelor X din planul P pentru care unghiul MXI este drept este cercul (OI) descris pe segmentul OI ca diametru. Fie K a doua intersecţie a cercurilor (OI), (OJ); MK este perpendiculară pe dreptele KI şi KJ deci pe planul P. Rezultă că din punctul M am dus două perpendiculare, anume MO şi MK pe planul P. Unde este eroarea?

Clasa a VII-a. *Exerc. 992.* In desvoltarea

$$[(n-p+1)x-p](x+1)^n$$

lipseşte termenul în x^p.

N. M.

VII. 993. Să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} ab & a^2 & b^2 \\ c^2 & bc & b^2 \\ c^2 & a^2 & ca \end{vmatrix}.$$

V. C.

VII. 994. Să se arate că

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ ax+b+c & a+bx+c & a+b+cx \end{vmatrix} = 0.$$

I. I. S.

VII. 995. Să se arate că, între elementele unui triunghiu

$$\begin{vmatrix} r_a & r_b & r_c \\ ar_a & br_b & cr_c \\ r_b+r_c & r_c+r_a & r_a+r_b \end{vmatrix} = 0.$$

E. M.

VII. 996. Să se rezolve sistemul

$$ax-by+z=a^2 \quad , \quad cx+ay-z=ab \quad , \quad bx-ay+z=ac$$

şi să se arate că dacă a, b, c sunt în progresie geometrică avem

$$cx=by=z.$$

E. M.

VII. 997. Să se rezolve sistemul

$$a^2x+ay+z=(a-b)(a-c) \quad , \quad b^2x+by+z=(b-c)(b-a)$$

$$c^2x+cy+z=(c-a)(c-b)$$

care este natura rădăcinilor ecuaţiei în t

$$xt^2+yt+z=0,$$

unde x, y, z se înlocuesc cu soluţiile aflate?

I. I. S.

VII. 998. Să se rezolve sistemul

$$a\,\mathrm{tg}x+b\,\mathrm{tg}y+c\,\mathrm{tg}z=0 \quad , \quad a'\,\mathrm{tg}x+b'\,\mathrm{tg}y+c'\,\mathrm{tg}z=0$$

ştiind că x, y, z sunt unghiurile unui triunghiu.

V. Gh.

VII. 999. Limita expresiei

$$y=\frac{\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x+3}}{\sin(x^2-4)},$$

când $x=2$. (Fără regula lui HÔPITAL).

V. C.

VII. 1000. Dacă $f(\sin x)=g\left(\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)$ să se arate că

$$g(\sin x)=f\left(\frac{2\sin x}{1+\sin^2 x}\right).$$

C. I. Ţ.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 922.* Se dau punctele A (2, 1) şi B (0, — 1) faţă de două axe perpendiculare. Să se scrie ecuaţia dreptei simetrice dreptei AB faţă de dreapta OA. Generalizare.

V. C.

VIII. 923. Se consideră dreapta $D \equiv 3x + 2y - 6 = 0$ şi dreapta $d \equiv 3x + y + 3 = 0$. Să se afle simetricele punctelor dreptei d de abscise -3, -1, 4 faţă de dreapta D. Să se verifice că aceste puncte sunt colineare şi să se afle ecuaţia dreptei pe care se află ele. Generalizare.

V. C.

VIII. 924. In triunghiul isoscel ABC, vârful A şi piciorul O al înălţimii din A sunt fixe, iar baza BC are o lungime variabilă. Fie încă I şi J două puncte fixe pe înălţimea AO. Paralela din J la BI taie pe AC în M. Să se arate că M descrie o paralelă la BC.

N. M.

VIII. 925. Să se arate că dreapta

$$(1 - a^2)\, x + 2ay - a^2 + 2a - 3 = 0$$

este tangentă la cercul

$$x^2 + y^2 - 2(x - y + 1) = 0.$$

Să se afle coordonatele punctului de tangenţă.

I. I. S.

VIII. 926. In raport cu două axe de coordonate rectangulare Ox, Oy se dă punctul A (1, 1) şi dreapta D având ecuaţia $x + y + 1 = 0$ şi se cere:

1°. Să se afle ecuaţiile celor două cercuri descrise pe segmentul OA drept coardă şi care sunt tangente dreptei D.

2°. Să se afle punctele de contact ale acestor două cercuri cu dreapta D.

3°. Să se afle al doilea punct de intersecţie a fiecăruia din aceste două cercuri cu dreapta $y = mx$ dusă prin origine, precum şi coordonatele mijlocului segmentului pe care această dreaptă îl determină pe cele două cercuri.

4°. Presupunând dreapta $y = mx$ mobilă, să se afle locul geometric al mijlocului segmentului de mai sus.

E. V.

VIII. 927. Se dau dreptele

$$4x + y - 4 = 0 \; ; \quad 16x + 13y - 52 = 0 \; ; \quad 64x - 101y - 568 = 0.$$

1°. Să se afle coordonatele centrului cercului înscris triunghiului care are ca laturi dreptele date.

2°. Să se scrie ecuația cercului înscris și ecuația tangentei la acest cerc, paralelă cu prima dintre dreptele de mai sus.

G. D. S.

VIII. 928. Să se determine a astfel ca ecuația

$$(1 + m)\, x^2 + (a\, m - 3)\, x + a - 3\, m = 0.$$

1°. Să admită o rădăcină independentă de m; 2° ambele rădăcini să fie independente de m.

I. I. S.

VIII. 929. Să se arate că

$$E_1 = 2(n-1)\, x^n - 2\, n\, x^{n-1} - n(n-1)(x-1)^2 + 2$$

$$E_2 = (n-1)\, x^{n+1} - (n+1)\, x^n + (n+1)\, x - (n-1)$$

se împart exact prin $(x-1)^3$.

C. I. Ț.

VIII. 930. Se dau doi scripeți A și B situați pe aceeași orizontală la o distanță fixă unul de altul. Peste cei doi scripeți este trecut un fir de capetele căruia atârnă câte o greutate P, iar pe fir, între cei doi scripeți lunecă un inel fără greutate proprie. O persoană apucă de inel și-l trage pe fir până ce porțiunea de fir între scriptele A și inel este verticală iar cealaltă porțiune, dela inel la scriptele B face unghiul de 60° cu verticala. Forța dată de persoană este de 10 kg. Să se determine greutățile P, pentru echilibru, în această poziție. Persoana dă drumul inelului, de care se atârnă o greutate tot de 10 kg. Să se determine ce poziție de echilibru vor lua firele.

G. Ț.

Exerciții Generale. *Exerc. 803.* Să se calculeze patratul numărului 800... 03.

Gh. B.

E. G. 804. Patratul numărului de 6 cifre

$$N = a\, b\, 00\, c\, d$$

este un număr de 12 cifre, care se bucură de proprietatea că dacă i se adună tranșele de câte 4 cifre se obține un patrat perfect.

Gh. B.

E. G. 805. Să se rezolve în numere întregi, ecuația

$$x^2 + xy = z^2$$

O. N. Ț.

E. G. 806. Nici un număr de forma $2^{2^p} + 1$, pentru $p > 4$, nu este divizibil cu numărul prim $65.537 = 2^{2^4} + 1$. Generalizare.

O. N. Ț.

E. G. 807. Să se rezolve ecuația

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

și să se deducă egalitățile

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24} = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \quad ; \quad \operatorname{tg}\frac{5\pi}{24} = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2});$$

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{24} = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \quad ; \quad \operatorname{tg}\frac{11\pi}{24} = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}).$$

C. I. Ț.

E. G. 808. Să se calculeze suma

$$S_n^k = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, C_{k+i}^k$$

unde simbolul C_p^q reprezintă numărul combinărilor de p obiecte luate câte q.

E. V.

E. G. 809. Să se calculeze determinantul

$$D \equiv \begin{vmatrix} abc & a^3 & b^3 & c^3 \\ d^3 & bcd & b^3 & c^3 \\ d^3 & a^3 & cda & c^3 \\ d^3 & a^3 & b^3 & dab \end{vmatrix}.$$

V. C.

E. G. 810. Limita expresiei

$$y = \frac{x \sin a - a \sin x}{x \sin x - a \sin a},$$

când $x = a$. (Fără regula lui HÔPITAL).

V. C.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

INSTRUCȚIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiunilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în primele două numere.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității rezolvând și probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societății „Gazeta Matematică" au apărut și se găsesc următoarele:

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută și adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 150

XX. **I. I. Chițulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 180

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană și sferică cu aplicații la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 500

XXII. **G. Țițeica,** *Culegere de Probleme de analitică.* Ediția II. Partea II adăogită de **N. G. Botea** și **C. Ionescu-Bujor** . . . . . Lei 250

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a Istoric), învățăminte. Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 100

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanică rațională,* Curs predat la Școala Politehnică din București, revăzut și adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Țițeica* și *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.500

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 320

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Iraționalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . Lei 400

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul Anghel Saligny)

I. **Ion Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* (Ediția II-a) . Lei 100

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime și minime geometrice* . . . Lei 250

Pentru biblioteci și autorități toate prețurile se triplează.

Pentru volumele din Colecția și Bibliotecile din „Gazeta Matematică" de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preț pentru taxele de expediție.

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru vol. LIII abonamentele sunt:

Pentru profesori, studenți și elevi . . . . . Lei 480

Pentru autorități și biblioteci . . . . . Lei 1.500

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ — C. 13.065.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU